AZAR Y CONOCIMIENTO

Una propuesta interdisciplinar para la enseñanza de la Probabilidad

José María Sorando Muzás

Texto revisado en 2014
del artículo publicado en:
Experiencias y Documentos n° 1, pp. 31 a 52.
Centro de Profesores de Monzón. 1987.

1.1 Introducción

Hay una tendencia bastante común entre el profesorado de Enseñanza Media que consiste en presentar a los alumnos el saber de la propia asignatura como una parcela aislada y autosuficiente. Pueden ser las causas de ello una formación parcial del licenciado especialista *(“especia1izarse es saber cada vez más de menos cosas”)* al que tampoco se ha formado adecuadamente en didáctica, o los condicionamientos que impone el propio sistema escolar *(“hay que terminar el programa”, “esto no va para Selectividad”, etc.).*

Sea cual sea la causa, lo cierto es que al ignorar las conexiones e implicaciones que todo conocimiento tiene con otros campos del saber, al negar a los alumnos esa proyección cultural, se cercena la realidad. E indirectamente se alimenta el mito de la Ciencia Pura, atemporal y neutra. Un mito muy conveniente para los intereses que luego instrumentalizan esa Ciencia.

Cada concepto y cada teoría, por abstractos que puedan parecer, han tenido un cuándo, un dónde, un por qué y un para qué. Lo que proponemos es intentar dar respuesta a estas preguntas en el aula e intentar relacionar conceptos dispersos en varias materias.

Como ejemplo a explorar hemos elegido la enseñanza de la Teoría de la Probabilidad, un tema que suele ser poco brillante a los ojos de los alumnos, pero que consideramos lleno de sugerencias: filosóficas, éticas, empíricas y lógico matemáticas.

1.2 La probabilidad en los programas de estudios

Desde que se escribió la versión primera de este artículo hasta hoy, se han sucedido los planes de estudios según las leyes educativas del momento. Pero hay contenidos que perviven en el curriculum. El alumno accede por vez primera al concepto de probabilidad matemática de un modo intuitivo, según la conocida Ley de Laplace (“*probabilidad es el cociente entre el número de casos favorables y el número de casos posibles*”). Esta primera aproximación es aplicable a las clásicas situaciones de lanzamientos de dados, extracciones de cartas, etc., que proporcionan la ocasión de utilizar el cálculo combinatorio (formal o intuitivo).

En Bachillerato ya se obtiene el modelo probabilista general según la concepción frecuentista. Es decir, la probabilidad de un suceso viene dada por su regularidad estadística observada para un gran número de experiencias. Luego se define variable aleatoria y se estudian distribuciones de probabilidad discretas (binomial) y continuas (normal).

En la asignatura de Filosofía caben los siguientes temas:

- Metodología del saber científico.
- Verdad y certeza.
- Lógica Proposicional y de Clases, con estudio de la estructura común de Algebra de Boole.

En Física se da una introducción a la estructura atómica molecular según el modelo de Rutherford; y se estudian las Partículas Fundamentales y la dualidad onda-corpúsculo en la naturaleza de la luz. Al terminar el Bachillerato, se presentan la Mecánica Cuántica y el Principio de Indeterminación.

Quizás convenga recordar en este punto que no se deben confundir los programas oficiales publicados en el Boletín Oficial, de redacción concisa y abierta a interpretaciones, con los desarrollos que de ellos hacen luego las editoriales. A menudo existe una inercia de sumisión al libro de texto que convierte en la práctica a aquellas en legisladoras.

1.3. Objetivos

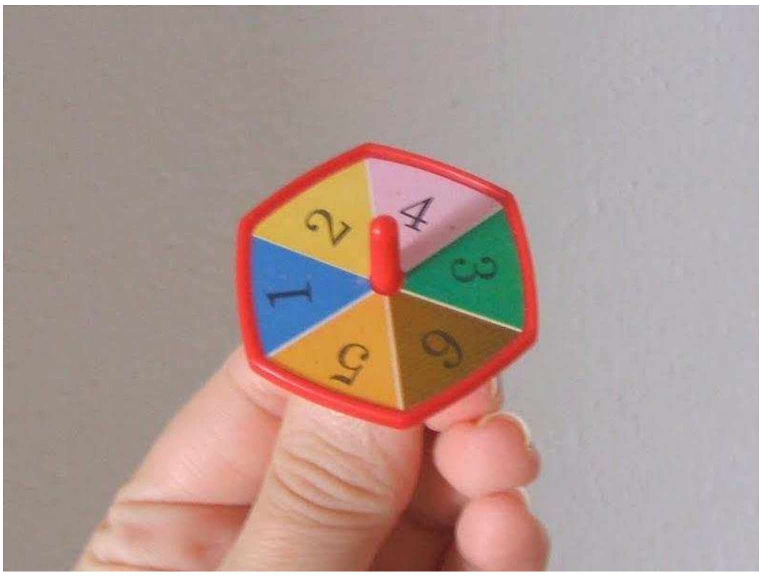
Establecemos como objetivos iniciales:

a) Reflexionar sobre temas de Filosofía de la Ciencia, como son: el azar y la necesidad, sus relaciones con la Ética, la ruptura epistemológica que supone la probabilidad frente al determinismo científico y el método de conocimiento que le es propio a las Matemáticas.

b) Introducción al concepto de azar en la Física Moderna, su aparición en la imagen física de la materia y el Principio de Indeterminación.

c) Estudio matemático de la Teoría de la Probabilidad según la Axiomática de Kolmogorov, previamente inducida, llegando al Teorema de Bayes.

Seguidamente se apunta un posible desarrollo del tema, modificable a partir de la bibliografía y del propio criterio.



2. LA PROBABILIDAD EN LA FILOSOFÍA

2.1 Azar, determinismo y destino

En la Antigua Grecia la noción de azar aparece ligada a la idea del hado o destino, inspiradora de la Tragedia. *"Algunos manifiestan que en Demócrito tal azar se refiere únicamente a la necesidad ciega, con lo cual terminan por identificar el concepto de azar con el de fortuna (por lo menos en tanto que este último es equiparado a las nociones de hado* o *destino). Esto equivale además a identificar el concepto de azar con el de completa ausencia de finalidad",* dice Ferrater (1).

Aristóteles, por su parte, distingue cuatro tipos de causas (Material, Formal, Eficiente, Final) e interpreta el azar como ausencia de causa eficiente (aquélla que precede necesariamente a un acontecimiento) en oposición a la que está predeterminado.

En la Edad Media, con el Aristotelismo se extiende su concepción de la casualidad. *"La expresión casus vel fortuna* -o *causa por accidente de algo que ocurre excepcionalmente- se contrapone a natura -lo que acontece siempre* o *casi siempre"* (2) como aparece en Alberto Magno *y* Tomás de Aquino.

La Ciencia Moderna, nacida con el Renacimiento, está dominada por la idea de un encadenamiento causal estricto en los procesos naturales. Mientras la predestinación concernía a las acciones humanas, el determinismo se asocia a las leyes causales que rigen el Universo. Para él *"cuanto ha sucedido, sucede y sucederá está de antemano condicionado, fijado y establecido"* (3) según leyes; lo cual es coherente con la imagen judeocristiana de un creador-legislador divino. Esta Ciencia, mediante la conceptualización e inferencia lógica aplicadas a los datos que proporciona la Naturaleza, nos permite el dominio de ésta, materializado en la Técnica. Con ella surgió en Occidente un nuevo poder que transformó el mundo.

2.2 Azar y metafísica oriental

En otra perspectiva cultural, allá donde la Lógica Aristotélica es desconocida, el Tao propone la inserción de a persona en los flujos vitales, en lugar de su control racional, como medio para interpretar en el azar el destino. Esta es la base de ***I*** *Ching* (*El Libro de las Mutaciones*), milenario juego de combinatoria *y* adivinación de uso extendido en China.

El juego consiste en la ordenación aleatoria, siguiendo un ritual, de 50 palillos y la posterior lectura del futuro en las figuras obtenidas, llamadas hexagramas. El libro es una guía para la interpretación de los hexagramas.

El psicólogo C. G. Jung estaba convencido del poder extraordinario de *I Ching* para predecir el futuro y lo explicaba mediante su teoría de la "sincronicidad". Según Jung, en la metafísica oriental existe una unidad cósmica de la que tanto las predicciones como los hechos reales son partes. En la medida que la persona que echa los palillos participe de esa unidad, puede acceder parcialmente a sus designios, ser guiado por una sabiduría inconsciente (4).

2.3 La polémica del azar

La gran polémica en Occidente sobre el azar se desarrolla en el siglo XIX.

Para los deterministas, dentro de una concepción mecanicista del Universo, los fenómenos aleatorios revelan la finitud de la mente humana. Dice Poincaré: *"Es a causa de nuestra debilidad, de nuestra ignorancia, que existe el azar para nosotros. Lo que es azar para el ignorante no lo es para el sabio"* (5).

El sueño del científico que busca una comprensión universal, se refleja en estas palabras, escritas por Laplace en el Prefacio a la *Théorie Analytique des Probabi1ités* (3ª edición. 1820): *"Supongamos por un momento una inteligencia que pudiera comprender todas las fuerzas que animan la naturaleza y su respectiva situación, junto con la de los seres que la componen -una inteligencia lo suficientemente vasta para someter estos datos a análisis-; ésta inc1uiria en la misma fórmula el movimiento de los grandes cuerpos del universo y los de los átomos más ligeros; nada seria incierto para ella y tanto el futuro como el pasado estarían ante si"* (6).

De estas opiniones se desprende que el azar no tiene su existencia en la realidad sino en el individuo incapaz de comprenderla. Otra variante de este criterio se da en Bergson, para el cual, dice Ferrater: *"El azar es* sólo *una intención vaciada de contenido, un hecho que solamente adquiere sentido por referencia al ser humano. El azar no se opone sin embargo a la intención, sino a la inversa: azar e intención son dos aspectos de una misma realidad, ambos opuestos a lo mecánico* (7).

Frente a los anteriores argumentos, otros defienden que hay azar en cualquier aspecto de lo real que consideremos, tanto en los procesos de la Naturaleza como en el comportamiento de una sociedad. Entre éstos, Emile Borel manifiesta que cuanto más particulares sean los casos que estudiemos se dará una mayor presencia del azar y que las leyes sólo se pueden referir a comportamientos globales, como una generalización de muchas individualidades. Un ejemplo claro se puede tomar de las tablas de mortandad anual, a partir de las cuales las compañías de seguros, con objeto de establecer las primas, consideran unas esperanzas de vida por edades que nunca podrán informarnos del futuro de un individuo pero si del de un colectivo. Se considera que una ley determinista sólo predice el estado más probable; es el límite ideal de un conjunto de leyes estadísticas cuya regularidad nos induce a prever los estados futuros con gran fiabilidad.

Los dos criterios expuestos dan lugar a las dos interpretaciones clásicas de la probabilidad (subjetiva y objetiva) según se considere que ésta reside en las opiniones o en los hechos.

2.4 Interpretaciones de la probabilidad

La interpretación subjetiva considera el término "probable" como un grado de creencia respecto de una afirmación sobre la que no existe un conocimiento absoluto. La certeza admite grados: un auditorio al que se expone un acontecimiento presenta diversos niveles de aceptación por parte de los oyentes, habiendo recibido todos ellos la misma información. La probabilidad depende en último término de un estado de ánimo.

Dice Russell: *"Lo que creemos firmemente, si no es conocimiento ni error y también lo que creemos con vacilación porque no tiene el más alto grado de evidencia, ni deriva de algo que lo tenga, puede denominarse opinión probable. Así la mayor parte de lo que pasa ordinariamente por conocimiento es una opinión más o menos probable"* (8).

Para el economista Keynes, la probabilidad relación lógica, como puede serlo la implicación, entre proposiciones cuyos grados de credibilidad compara; formula la probabilidad del enunciado "p" sino la de “p conocida la verdad de r".

La otra interpretación, objetiva o empirista, asigna a cada suceso un valor numérico que es el límite ideal de los valores observados para su frecuencia relativa cuando el número de observaciones es muy grande. Esta asignación de probabilidad en ningún caso es una conclusión estrictamente lógica, sino una elección que nos permite un conocimiento aproximado de 1a realidad. Y esta elección se hace desde el convencimiento de que el azar se ciñe a ciertas leyes.

Dice Bunge: *“Sólo hay azar cuando se cumple una regularidad estadística. No podemos creer que una moneda sea correcta y se haya lanzado al azar, a menos que en una larga secuencia de lanzamientos se obtenga una razón cara-cruz aproximadamente estable”* (9).

Participando en mayor o menor medida de estas interpretaciones la probabilidad aparece, citamos a Nagel (10), en 5 contextos: "*1) Conversación cotidiana. 2) Estadística aplicada. 3) Teorías físicas y biológicas. 4) Comparación de las teorías por sus grados de probabilidad. 5) En la rama de las Matemáticas conocida como Cálculo de Probabilidades."*

2.5 Azar y Ética

No hay que ignorar las implicaciones que en el terreno de la Antropología y la Ética tiene la aceptación o negación del azar.

El Determinismo, por cuanto niega la existencia del libre albedrío, es refutado por aquellos (p.ej. los existencialistas) para quienes la libertad es condición necesaria de la vida humana.

El Probabilismo estima que el juicio sobre la licitud de una acción no se presenta como cierto sino como probable. ¿Qué criterio se debe seguir entonces para estar seguros de la rectitud de nuestra decisión? Cabe un proceder laxo, liberados de responsabilidad, o riguroso, obligados por la opción más probable, tal como recomienda Descartes.

La doctrina jesuítica del Probabilismo aconseja obrar no según lo más probable sino de acuerdo con aquello que pueda traer el bien mayor.

Según Keynes, la Ética normal propone guiarnos por el criterio de la esperanza matemática: “*Para obtener cuál debe ser nuestra preferencia en relación con varios métodos de acción alternativos, debemos sumar para cada tipo de* acción *una serie de términos procedentes de las sumas de lo bueno que puede añadirse a cada una de sus posibles consecuencias, multiplicado cada uno previamente por su probabilidad"* (11). Aquí surge la cuestión de si se pueden asignar valores numéricos a términos como bondad o quizás a lo único que se puede aspirar es a la descripción de posibilidades. Esta otra opción se realiza mediante árboles lógicos y recibe el nombre de Proyección Estocástica.

Los jansenistas recomiendan considerar la proporción entre el bien posible y su probabilidad. Pascal concibe la fe como una apuesta en la que, aunque la probabilidad de la existencia divina fuera minúscula, la ganancia asociada es infinita, una eternidad dichosa: “*… si ganáis, ganáis todo; si perdéis, no perdéis nada. Optad, pues, porque exista sin vacilar”* (12). Al argumentar así no considera Pascal que el producto de una probabilidad infinitesimal por un bien infinito pueda dar un resultado finito o infinitésimo, y da una versión poco ortodoxa de la fe (desde el punto de vista religioso) al confundirla con un razonamiento de intereses.

.

3. LA PROBABILIDAD EN EL ESTUDIO DEL MUNDO FISICO

3.1 Azar y Método Científico

"El Método Científico es la técnica más segura ideada por el hombre para controlar el flujo de las cosas y establecer creencias estables" (Nagel y Cohen).

La Ciencia propone una explicación a los fenómenos del mundo físico. Parece por lo tanto que aceptar en ella el azar debiera atentar a sus principios. No ha sido así.

Para Poincaré: *"El científico debe empezar con orden. La Ciencia se construye con hechos igual que una casa se construye con ladrillos. Pero una colección de hechos no es más ciencia que un montón de ladrillos una casa"* (13). Estos hechos pueden ser interpretados estadísticamente o induciendo de ellos leyes de validez universal. Y, siguiendo a Poincaré, si escogemos leyes para ordenar nuestra experiencia es *"no porque sean verdaderas, sino porque son muy convenientes"*. Pone como ejemplo a la Geometría Euclídea, *"que no es verdadera sino ventajosa"*, como lo confirma la existencia de otras geometrías no euclídeas y no contradictorias.

La anterior opinión manifiesta la cura de humildad que ha experimentado la Ciencia en el último siglo, relativizando sus proposiciones. Encontramos el ejemplo más claro de ello en la imagen de la Naturaleza propuesta por la Física, que pasó del determinismo total a la aceptación de la indeterminación.

La formación de la imagen mecanicista iniciada en el Renacimiento con Galileo, alcanzó su apogeo en el siglo XVII con Newton, Huygens, Descartes, Boyle, etc. Su prototipo es la Física Newtoniana, estructurada de modo tal que a partir del estado de un sistema en un instante dado puede preverse el futuro movimiento del sistema.

En la Teoría Cinética de los Gases, el azar llega a coexistir con la ley por conveniencia. Así ocurre al formular las leyes de Mariotte y Gay-Lussac a partir de la hipótesis de que las velocidades de las moléculas gaseosas varían irregularmente, es decir, al azar. La admisión del azar permite en este caso extraer conclusiones.

Con la Mecánica Estadística del siglo pasado se intenta sacar consecuencias del conocimiento imperfecto de un sistema mecánico complejo mediante series estadísticas. Se acepta implícitamente el determinismo, recurriendo al azar como medida de la propia ignorancia.

La irrupción definitiva del Azar en las Ciencias Físicas se da en el siglo XX con la Mecánica Cuántica.

3.2 El Principio de Incertidumbre

"La parte más segura de nuestro conocimiento presente es saber qué es lo que no podemos saber" (J.R. Newman).

Llegados a este punto podemos optar por enunciar el Principio de Incertidumbre, dando una información somera que permita conocer su alcance en la Filosofía de la Ciencia, o bien inscribirlo en una introducción a la Mecánica Cuántica, a cargo del profesor de Física o Química. Nos limitaremos a lo primero.

La imagen de la materia que en el siglo pasado adoptó la Química consideraba 92 elementos distintos, 92 diferentes clases de átomos que se suponían indivisibles y cuya unión en moléculas da lugar a los cuerpos compuestos. Posteriormente la Física descubrió que todo átomo contiene a su vez tres tipos de partículas: electrones, protones y neutrones, teniendo las dos primeras cargas eléctricas de igual valor absoluto y signo contrario (negativa y positiva, respectivamente). Al ser estas partículas los componentes últimos y comunes de la materia, se abría la posibilidad de la transmutación de unos elementos químicos en otros, lograda desde que Otto Han descubriera en 1938 la fisión nuclear.

A partir del hallazgo de las partículas subatómicas se consideró un modelo atómico (Rutherford y Bohr) donde "*N electrones gravitan alrededor de un núcleo cuya carga es N veces la de un protón de modo que el conjunto es eléctricamente neutro*". Este modelo, semejante a un sistema planetario, es en principio manejable por la intuición. Pero la descripción del movimiento de las partículas en su interior resultó ser imposible dentro de la Mecánica Clásica y esto originó una ruptura tal que sobrepasa el terreno de la Física para entrar en el de la Epistemología o Teoría del Conocimiento. Veamos en qué sentido.

Hasta entonces se suponía que la imprecisión en las mediciones se debía a la calidad de los métodos e instrumentos usados y que, al mejorar ésta, disminuiría aquélla. El físico alemán Werner Heisemberg (14) comprobó que *"es imposible medir con precisión el momento (velocidad) de una partícula al mismo tiempo que se hace una medida igualmente precisa de su posición"*; de modo que "*cuanto* más *exactamente se determina la velocidad de una partícula, tanto menos exactamente puede determinarse su posición, y viceversa. No pueden determinarse simultáneamente ambas con la misma precisión";* debido a la influencia que el instrumento de observación ejerce sobre la partícula. Entonces "*podemos distribuir como queramos la incertidumbre, pero nunca eliminarla",* aunque los métodos de medición progresaran ilimitadamente. Heisemberg llegó a acotar inferiormente el producto de los errores posibles, mediante la relación:

$$\Delta p \cdot \Delta q \geq \frac{h}{2 \cdot \pi}$$

Donde Δp y Δq son, respectivamente, las variaciones, en un instante dado de velocidad y posición de la partícula, y h es la llamada "constante de Planck" (el menor paquete de energía que se encuentra en la Naturaleza).

Por mucha precisión que logremos, nuestro error será <u>al menos</u> $\frac{h}{2 \cdot \pi}$. La consecuencia inmediata es que estos movimientos carecen de una trayectoria previsible; no pueden ser descritos de forma precisa y continua en el espacio y el tiempo, conforme al ideal clásico. No parecen sujetos a leyes deterministas y hay que recurrir a su control estadístico mediante series de observaciones puntuales. Entonces, cualquier previsión de estados futuros deberá hacerse en términos de probabilidad. Así, las posiciones de la partícula se representan por una variable aleatoria y suelen utilizarse expresiones como: *"la probabilidad de que el electrón se encuentre en el intervalo [x. x+dx] es p(x)·dx"*.

La relación enunciada data de 1927 y es conocida como Principio de Incertidumbre y también de Indeterminación. Como señala Ferrater (15) *"el término alemán es Ubestinmheit, cuya traducción más corriente es indeterminabilidad"* y la variedad de traducciones responde a las diversas interpretaciones que de ella se han hecho. Surge nuevamente la polémica entre azar objetivo o subjetivo, según se considere que la indeterminabilidad reside en el hecho observado o en el observador.

En apoyo de lo primero dice Bunge: *"Un objeto en interacción con nuestros medios de observación puede ser objetivamente diferente del objeto libre. Ejemplo: una partícula microscópica se desvía de su trayectoria espontánea por la luz destinada a localizarla y la presión sanguínea de un paciente puede aumentar por la mera consciencia de que se le va a medir"* (16).

Para otros, *"la idea de que hay interacción entre observador y objeto observado prueba que el supuesto indeterminismo es sólo resultado de una intervención; si ésta pudiese eliminarse, se eliminaría el indeterminismo"* (17).

3.3 <u>El Dios de los dados</u>

En el estudio de la naturaleza de la luz, la inicial teoría corpuscular (que, justificaba la propagación rectilínea y la reflexión en espejos) fue sustituida por la ondulatoria (que explicaba además los fenómenos de interferencia y difracción así como los diversos tonos del espectro por sus diferentes longitudes de onda).

La aparición del efecto fotoeléctrico, en el que la materia iluminada despide electrones en movimiento rápido hizo reconsiderar que la luz está formada por corpúsculos o "fotones". Como explicación que hiciera compatibles ambos aspectos, en lugar de considerarlos contradictorios, se admitió su complementariedad suponiendo la existencia de una asociación onda-corpúsculo.

Esta teoría se trasladó a la estructura de la materia, suponiendo ésta formada por partículas onda cuyo comportamiento a gran escala coincide con el que describía la Mecánica Clásica, pero que en pequeñas trayectorias (del orden de su longitud de onda asociada) debe ser explicado de otro modo. Así surge la Mecánica Ondulatoria o Cuántica.

En el caso de los movimientos citados, se considera que las ondas asociadas son estacionarias y les corresponden ciertas cantidades o cuantos de energía.

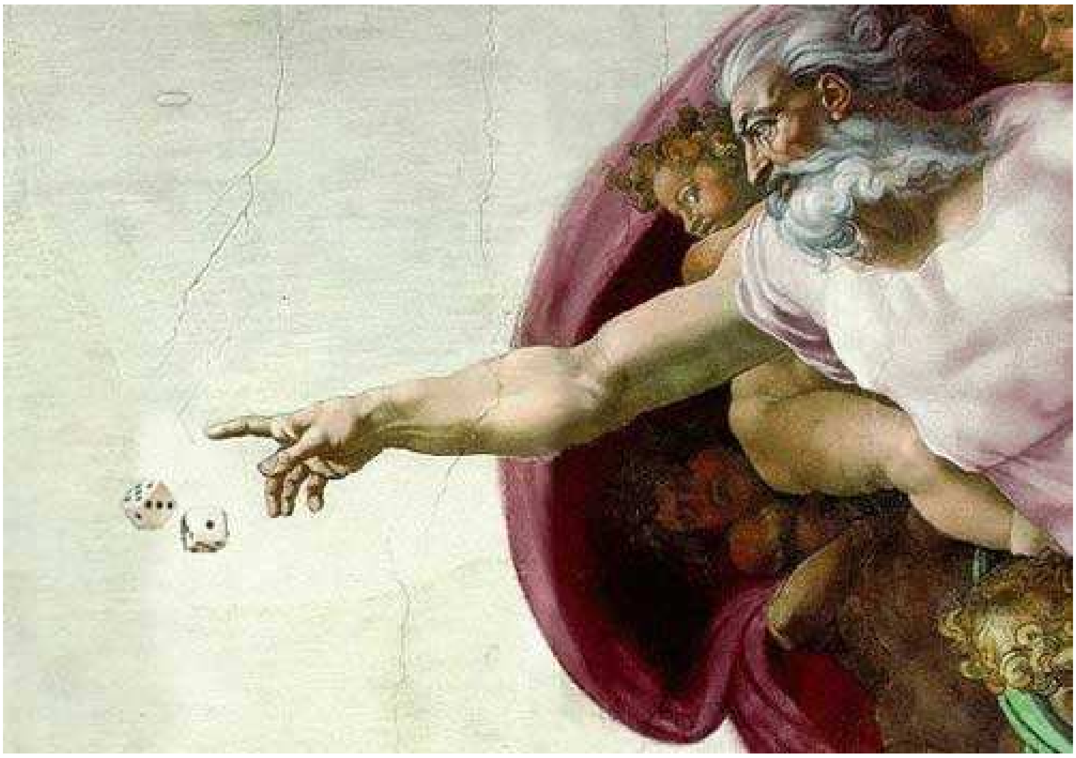
La transición de un estado a otro, salto cuántico, se explica mediante una toma o cesión de energía (radiación) que se produce, nuevamente, de forma discontinua e impredecible para el observador, *"a golpes"*. Por ello recomienda Schrödinger, creador de la imagen ondulatoria, lo siguiente: *"No hemos de admitir la posibilidad de la observación continua"*, ya que sólo experimentamos lo discreto. *"Es mejor considerar la partícula* no *como una entidad permanente; sino como un acontecimiento instantáneo"* (18). Se explica así el Universo por la colaboración estadística de muchos pequeños sucesos de comportamiento irregular, y, según Heisemberg: *"se hace inevitable considerar a las regularidades de la Naturaleza como regularidades estadísticas"* (19).

Albert Einstein aceptaba como hipótesis de trabajo que una función de onda sea de probabilidad (interpretación cuántica), pero se negaba a reconocer que ésta fuera una explicación definitiva y completa. Sus esfuerzos iban en sentido contrario, con la Teoría del Campo Unificado. En carta del 7 de Septiembre de 1944 escribe a Born: *"Tú crees en el Dios que juega a los dados y yo creo en la ley y en la ordenación total de un mundo que <u>es</u> objetivamente y que yo trato de captar en una forma locamente especulativa"* (20).

La preocupación einsteniana advierte que si las partículas constituyentes de la materia están definidas por funciones de probabilidad, hay una pérdida del concepto de esencia individual. Bohr llega a decir: *"Las partículas materiales aisladas son abstracciones porque son propiedades sólo definibles y observables a través de su interacción con* *otros sistemas"* (21). Y entre los factores que interaccionan, además de los procesos de medida, está la inteligencia del propio observador. .

Pero lo cierto es que, como dice Bunge: *"Hemos aprendido ya a vivir contando con el azar; hemos descubierto algunas de sus leyes y hemos llegado, consiguientemente, a darnos cuenta de que el azar no es el caos"* (22).

Como resumen, podemos concluir que la Física no es ya una explicación total y exacta del Universo, ni una filosofía, sino una aproximación limitada que acepta que el conocimiento incompleto de un sistema es parte esencial de cualquier formulación que del mismo hagamos.



4. LA PROBABILIDAD EN LAS MATEMATICAS

4.1 La Teoría de la Probabilidad

El tratamiento matemático de los fenómenos de azar tiene su pionero en Cardano (1501-1576) y su manual del jugador *Liber de Ludo Aleae*, pero alcanza mayor proyección a partir de la correspondencia que en 1654 mantienen Pascal y Fermat a propósito de unos problemas de juegos propuestos al primero por un reputado jugador, el Caballero de Méré. Su desarrollo inicial está unido al de la Combinatoria, tratándose el caso, propio de los juegos de azar, de un número finito de sucesos equiprobables e incompatibles. La obra cumbre. de este período es la "Théorie Analytique des Probabilités" escrita en 1812 por Laplace. Este estudio, al definir la probabilidad de un suceso como *"e1 número de casos favorables partido por el de casos posibles cuando todos sean igualmente probables e incompatibles entre sí"*, limita grandemente las situaciones de estudio y además incurre en el círculo vicioso de incluir el término definido en la definición.

En un concepto más amplio, se constituye el Cálculo de Probabilidades como una idealización de generalizaciones sobre datos estadísticos. Para ello hay que basarse en un convenio de paso al límite de justificación empírica pero indemostrable; la famosa "Ley de estabilidad de las frecuencias" o "Ley del Azar" ya enunciada por Jacques Bernouilli en 1713 en el *Ars Conjectandi*.

Sólo al ser axiomatizada en 1933 por Kolmogorov, puede considerarse la Teoría de la Probabilidad como una rama de la Matemática Pura; una estructura lógico formal sin un significado concreto y único pero con un referente en la realidad que le da un valor operativo. *"E1 reconocimiento de la posibilidad de cierto número de interpretaciones del cálculo abstracto de la probabilidad disuelve una confusa disputa y estimula, además, la búsqueda de ulteriores interpretaciones de una misma estructura vacía"* (23).

4.2 Deudas de iuego

Pocos temas como éste de la Probabilidad poseen un origen histórico tan concreto y accesible a su tratamiento en el aula. No debemos desperdiciar por ello la oportunidad de recrearlo presentando a nuestros alumnos los dos famosos problemas del Caballero de Méré: "la apuesta al doble seis" y "el juego interrumpido". Unos posibles enunciados de estos dos clásicos problemas son éstos:

> - El jugador De Méré había observado que en 4 lanzamientos de dado es ventajoso apostar por el suceso "obtener al menos un 6". Supuso que sería también ventajoso apostar en 24 lanzamientos de 2 dados por el suceso "obtener al menos un doble 6". Para ello razonó que optar 4 veces entre 6 resultados es equivalente a optar 24 veces entre 36 resultados, pues 4/6 = 24/36. Sin embargo, al poner en práctica esta apuesta perdió dinero reiteradas veces, por lo cual maldijo a las Matemáticas. ¿Por qué la primera apuesta es ventajosa y no lo es la segunda? (24).
>
> - Dos jugadores, A y B, apuestan 32 monedas cada uno en el siguiente juego: se lanza una moneda de modo que si sale cara, A se anota un punto y, si sale cruz, lo hace B. En un momento dado debe interrumpirse el juego, siendo imposible reanudarlo. Hasta ese momento A ha obtenido 4 puntos y B 3 puntos. Si la partida se jugaba hasta que un jugador obtuviera 5 puntos, ¿cómo deberán distribuirse el dinero apostado? (25).

Los intentos de resolución intuitiva a estas dos cuestiones pueden llevar a interesantes conjeturas que discutir y verificar en clase. Posteriormente a las anécdotas motivadoras, es preciso crear el marco formal necesario para un desarrollo teórico coherente.

4.3 Desarrollo teórico

En el siguiente guión se omiten las demostraciones, todas ellas convencionales.

A partir del conjunto Ω, espacio muestral de los sucesos elementales asociados a un experimento aleatorio, cabe considerar: sus subconjuntos (sucesos compuestos), conjunto de partes $P(\Omega)$ (conjunto de sucesos), conjunto universo (suceso seguro), conjunto vacío (suceso imposible), subconjuntos complementarios (sucesos contrarios), inclusión, unión e intersección de subconjuntos (ídem de sucesos), subconjuntos disjuntos (sucesos incompatibles) y particiones de Ω (sistemas completos de sucesos). Esta descripción conjuntista nos permite acudir en todo momento a los métodos de representación y demostración así coma a los apoyos intuitivos de la Teoría de Conjuntos. Es la única ocasión para ello en el Bachillerato actual.

El conjunto de sucesos $P(\Omega)$, dotado de las operaciones definidas, tiene una estructura de Algebra de Boole. En ella existen dos operaciones internas, unión e intersección, y es aplicable el Principio de Dualidad, según el cual, *"en toda estructura donde coexisten dos axiomas duales, cualquier teorema deducido de uno de ellos implica su teorema dual"*. Este Principio permite aligerar el trabajo en las demostraciones posteriores. Se demuestran las propiedades de identidad, involución y Leyes de Morgan.

Consideramos ahora las frecuencias absoluta y relativa de un suceso A en *n* pruebas y sus tres propiedades fundamentales. Se comprueba en algún caso práctico que, cuando *n* toma valores muy grandes, *fr* (A) tiende a estabilizarse en torno a un valor. Y para esta comprobación empírica un instrumento útil puede ser el ordenador. Un sencillo programa de simulación o una hoja de cálculo nos permite realizar mil lanzamientos de una moneda, un millón, o el número que queramos, y observar cómo la frecuencia relativa de caras (p.ej.) es cada vez más próxima a 0.5 Durante mucho tiempo esto se enunciaba como "Ley del Azar" (concepto contradictorio si se considera al azar como negación de la ley) suponiendo que existía un límite, al que se llamaba probabilidad del suceso. Bernouilli lo justificó con la llamada "Ley débil de los grandes números". Pero no informaba de en qué prueba puede lograrse la proximidad deseada entre frecuencia y probabilidad.

Para prescindir del empirismo y elaborar un modelo teórico que conserve la intuición anterior, se abstrae la noción de Probabilidad, definiéndola con tres axiomas "heredados" de las propiedades fundamentales de la frecuencia relativa (1: Tomar siempre valores positivos. 2: Valores entre 0 y 1. Y 3: Aditividad para la unión de sucesos incompatibles). Esta es la Axiomática de Kolmogorov. De ella se deducen inmediatamente propiedades como el Teorema de la Probabilidad Total.

Podemos obtener ahora, usando los axiomas, la clásica Regla de Laplace para el caso de Ω formado por un número finito de sucesos elementales incompatibles dos a dos y equiprobables, observando que, cuando el número de casos favorables y posibles coincide, la probabilidad se convierte en certeza.

La obtención de información relacionada con una experiencia hace variar la probabilidad de los sucesos asociados. Esto puede comprobarse en un ejemplo y de él inducir el concepto y definición de probabilidad condicionada. Luego se tratarían el Teorema de la Probabilidad Compuesta y la independencia de sucesos.

4.4 El Teorema de Bayes

Observemos que, al ser un sistema completo de sucesos $\{A_1, A_2 \ldots An\}$ una partición del espacio muestral, simultáneamente a la realización de cualquier otro suceso A se habrá dado la de un A_i del sistema (tan sólo uno, por ser los A_i incompatibles dos a dos). Esto nos lleva a interpretar dicho A_i como la causa de que se haya producido A. Ejemplo: Se tienen 3 bolsas A_1, A_2 y A_3 de idéntica apariencia externa, conteniendo distintos números de bolas rojas y negras. El suceso A = "extraer una bola negra al azar" es *"simultáneo a"* o, según lo anteriormente expuesto, *"depende de"* la elección de una bolsa A_i. Parece lógico preguntarnos por las probabilidades de extraer bola negra en cada A_i, "verosimilitudes". Pero, una vez producido A, lo que ignoramos es cuál ha sido la causa A_i. Por ello nos planteamos las "probabilidades a posteriori", probabilidades de que, si la bola extraída es negra, ésta proceda de la bolsa A_i.

La anterior cuestión es el objeto del controvertido Teorema de Bayes, según el cual, en este caso:

$$P(A_i / A) = \frac{P(A/A_i)\cdot P(A_i)}{\sum P(A/A_j)\cdot P(A_j)} \qquad j = 1, 2, 3$$

La aceptación de este Teorema llegó a escindir a los estadísticos en "bayesianos" y "no bayesianos". La principal objeción que se le opone está en considerar que no tiene ningún sentido asignar probabilidades a hechos ya ocurridos. En el ejemplo inicial la bola negra sólo procede de una de las bolsas, a la que corresponde toda la probabilidad: 1. Siempre se ha creído que el futuro está condicionado por el pasado, pero el pasado no lo está por el futuro. La visión actual considera antecedentes y consecuentes ligados en un único flujo, reversible sólo en nuestro análisis. Al querer desvelar el pasado a partir de datos actuales nos semejamos al observador imaginado por Flammarion (26) quien, al alejarse de la Tierra a una velocidad. superior a la de la luz, ve la Historia invertida. Para él los efectos preceden a sus causas y todo es inexplicable, todo es azar.

4.5 El método matemático

Reflexionemos un momento acerca del proceso seguido, que responde a un modo singular de tratar los problemas, el método matemático.

La observación de 1a realidad nos proporciona unos fenómenos (azar). Sobre ellos hacemos una abstracción, creando unos conceptos (espacio muestral, probabilidad) que a continuación estructuramos según sus propiedades esenciales (axiomática). Se desarrolla la teoría abstracta por deducción lógica a partir de los axiomas. Los resultados así obtenidos se confrontan por último con la realidad (aplicaciones). El origen y el objetivo final están en lo concreto pero la teorización nos permite, gracias al aparato lógico matemático, mayor precisión y eficacia que con un tratamiento puramente intuitivo, viciado éste por una carga de nociones y hábitos que se suelen dar por supuestos sin justificación. Y se alcanza además una belleza formal al lograr poner un orden donde aparentemente no lo había.

5. OBSERVACIONES

En las páginas anteriores se han propuesto un enfoque y unos apuntes de trabajo para la enseñanza de la Probabilidad. Siempre es posible una mayor profundización según el interés colectivo. Para ello se requiere la colaboración de los profesores de Filosofía, Matemáticas, Física y Química, que consideramos ha de ser fecunda porque permite superar la maniquea división entre Ciencias y Humanidades y marca un camino para posteriores intentos. Ayudar a ello ha sido el objetivo de este trabajo.

6. NOTAS Y LOCALIZACIÓN DE CITAS

(1) José FERRATER MORA. *Diccionario de Filosofía*: Azar, p. 268.

(2) Ibíd, Azar, p. 269.

(3) Ibíd, Determinismo, p. 277.

(4) C. G. Jung. Prólogo a la edición inglesa de *I Ching, das Buch der Wandlungen* de Richard Wilhelm. Princeton University Press.

(5) Henri POINCARÉ. *El azar*. Vol 3º *Sigma*, p. 68.

(6) Pierre Simon de LAPLACE. *Sobre la probabilidad*. Vol 3º *Sigma*, p. 12.

(7) FERRATER op. cit. Azar, p. 270.

(8) Bertrand RUSSELL. *Los problemas de la Filosofía*, p. 119.

(9) Mario BUNGE. *La investigación científica*, p. 369.

(10) Ernest NAGEL. *Significado de la Probabilidad*. Vol 3º Sigma, p. 91.

(11) John Maynard KEYNES. *La aplicación de la probabilidad al comportamiento*. Vol. 3º *Sigma*, p. 51.

(12) Blas PASCAL. *Pensamientos*, p. 51.

(13) James R. NEWMAN. Vol 3º *Sigma*, pp. 65 a 68.

(14) Werner HEISEMBERG. *La imagen de la Naturaleza en la Física actual*, p. 33.

(15) FERRATER, op. cit. Incertidumbre, p. 1645.

(16) BUNGE, op. cit, p. 468.

(17) FERRATER, op. cit, p. 1645.

(18) Erwin SCHRÓDINGER. *Causalidad y Mecánica Ondulatoria*. Vol 2º *Sigma*, p. 333.

(19) HEISEMBERG, op. cit, p. 30.

(20) Albert EINSTEIN, Hedwig y Max BORN. Correspondencia (1916-1955), p. 189.

(21) Luis RACIONERO. *Filosofías del Underground*, p. 125.

(22) BUNGE, op. cit, p. 468.

(23) Ibíd, p. 465.

(24) De Meré aplicaba las únicas Matemáticas que conocía, la Regla de Tres. Si aplicamos el Cálculo de probabilidades actual, queda claro por qué la primera apuesta es ventajosa y la segunda no lo es:

P (al menos un 6 en 4 lanzamientos) = $1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0{,}516 > 0{,}5$

P (al menos un doble 6 en 24 lanzamientos) = $1-\left(\frac{35}{36}\right)^{4}$ = 0,491 < 0,5

(25) Pensando en las dos siguientes jugadas, hay cuatro posibles desarrollos de la partida, según ganen los dos tantos A, B o una vez cada uno: AA, BB, AB y BA. En tres de ellos el ganador final del juego sería A y en uno sería B. Por ello parece justo hacer el reparto a favor de A, en proporción de 3 a 1: 24 monedas para A y 8 para B.

Las respuestas más comunes de los alumnos suelen ser: *"repartir en proporción 4 a 3", "repartir en proporción inversa, 2 a 1", "todo para A"* e incluso *"a partes iguales entre A y B y luego que se vayan juntos a tomar unas copas"*. Quizás esta última se al opción más sensata.

(26) POINCARÉ, op. cit, p. 72.

7. BIBLIOGRAFÍA

Abbagnano, Nicolás. *Historia de la filosofía*. Montaner y Simón. Barcelona 1978.

Borel, Emile. *Las probabilidades y la vida*. Oikos Tau. Barcelona 1971.

Bunge, Mario. *La Investigación Científica*. Ariel. Barcelona 1980.

Einstein, Albert; Born, Edwig y Max. *Correspondencia (1916-1955)*. Siglo XXI. México 1973.

Ferrater Mora, José. *Diccionario de Filosofía*. Alianza. Madrid 1979.

Freudenthal, Hans. *Mathematics as an Educational Task*. D. Reidel Publishing Company. Dordrecht 1973.

Geymonat, Ludovico. *Filosofía de la Ciencia*. Labor. Barcelona 1972.

Heisemberg, Werner. *La imagen de la Naturaleza en la Física actual*. Ariel. Barcelona 1976.

Lauer, Mirko. *I Ching*. Barral Editores. Barcelona 1975.

Newman, James R. *Sigma. El mundo de las Matemáticas*. Grijalbo. Barcelona 1979.

Pascal, Blas. *Pensamientos*. Espasa Calpe. Madrid 1967.

Pearson E.S. & Kendall M.G. *Studies in the History of Statistics and Probability*. Charles Griffin & Co. Londres 1970.

Racionero, Luis. *Filosofías del Underground*. Anagrama. Barcelona 1977.

Russell, Bertrand. *Los problemas de la Filosofía*. Labor. Barcelona 1980.

Todhunter, Isaac. *A History of the Mathematical Theory of Probability*. Chelsea Publishing Co. New York 1965.