ANÁLISIS

Junio 1994. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función cuya primera derivada es $f'(x) = 2x - x^2$. Se pide:

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, de concavidad y convexidad de la función f(x). *(4 puntos)*

b) Razonar si existen máximos, mínimos y puntos de inflexión. En caso de que existan, calcularlos. *(2 puntos)*

c) Representar la gráfica de una función cuya primera derivada sea $2x - x^2$. *(2 puntos)*

d) La gráfica representada en el apartado anterior ¿es la única que se podía pintar? ¿por qué?. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) CRECIENTE: $(0 , 2)$; DECRECIENTE: $(-\infty , 0) \cup (2 , \infty)$; CÓNCAVA: $(-\infty , 1)$; CONVEXA: $(1 , \infty)$

b) MÍNIMO: $x = 0$; MÁXIMO: $x = 2$; PUNTO DE INFLEXIÓN: $x = 1$

c) La más sencilla es: $f(x) = x^2 - 1/3\, x^3$: Mínimo: $(0 , 0)$; Máximo: $(2 , 4/3)$; Punto de inflexión: $(1 , 2/3)$

Cortes con ejes: $(0 , 0)$; $(3 , 0)$

d) No, se podrían haber considerado infinitas funciones diferenciadas en una constante.

Junio 1994. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x}$, se pide:

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Razonar si existen máximos y mínimos y en caso de que existan, calcularlos. *(6 puntos)*

b) Estudiar la existencia de asíntotas. En caso de que existan, calcularlas. *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) CRECIENTE: $(-\infty , -2)$ $(2 , \infty)$; DECRECIENTE: $(-2 , 2)$; MÁXIMO: $(-2 , -4)$; MÍNIMO: $(2 , 4)$

b) Asíntotas verticales: $x = 0$; asíntotas oblicuas: $y = x$

Septiembre 1994. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que cumple las siguientes condiciones:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ iii) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ iv) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ v) $f(0) = 0$

Se pide:

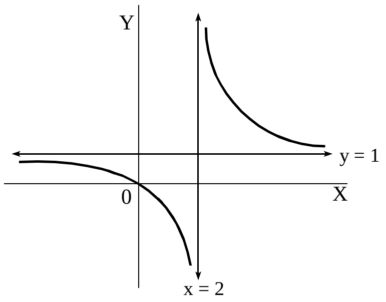
a) Dibujar la gráfica de una función f que verifique las cinco condiciones anteriores. (Razonar la gráfica dibujada). *(4 puntos)*

b) Dar la ecuación de la función representada en el apartado anterior. (Razonar la respuesta). *(2 puntos)*

c) Representar la gráfica de la función $g(x) = \dfrac{x}{x-2}$ haciendo un estudio de su crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad. *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.

a)



b) $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$

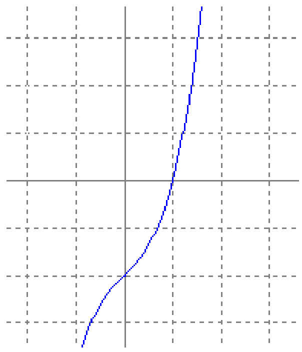
c) La gráfica de la función g(x), se corresponde con la anterior:

- La función es decreciente x.
- Es convexa en $(-\infty , 2)$ y cóncava en $(2 , \infty)$

Septiembre 1994. Dada la función $y = x^3 + x - 2$, se pide:

a) Dar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. Razonar si existen máximos y mínimos, y en caso de que existan, calcularlos. *(3 puntos)*
b) Dar los intervalos de concavidad y convexidad de la función. Razonar si existen puntos de inflexión, y en caso de que existan, calcularlos. *(3 puntos)*
c) Representar la gráfica de la función. *(2 puntos)*
d) Dar la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa x = 0. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) La función es CRECIENTE $\forall x$. No hay máximos ni mínimos.
b) CONVEXA: $(-\infty , 0)$; CÓNCAVA: $(0 , \infty)$; PUNTO DE INFLEXIÓN: $(0 , -2)$
c) Puntos de corte con los ejes: $(1 , 0)$; $(0 , -2)$



d) $y = x - 2$

Junio 1995. a) Considerar la función $f(x) = x^3 + ax + b$ siendo $a, b \in \mathbb{R}$. Hallar a y b para que f(x) tenga un mínimo en el punto (1,1). Razonar la respuesta. *(5 puntos)*

b) Considerar la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$. Razonar si existen máximos, mínimos y puntos de inflexión; en caso de que existan, calcularlos. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) $a = -3$; $b = 3$
b) MÁXIMO: $(0 , 0)$; No hay PUNTOS DE INFLEXIÓN.

Junio 1995. a) El coste de la producción de x unidades diarias de un determinado producto es $x^2 + 10x + 10$ y el precio de venta de una unidad es (30 − x). Calcular el número de unidades del producto que deben venderse diariamente para que el beneficio sea máximo y el beneficio máximo que se obtiene. Razonar la respuesta. *(5 puntos)*
b) Hallar la región del plano limitada por las gráficas de las siguientes funciones: $y = x^2 + 1$ e $y = x + 3$ *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) Deben venderse 5 unidades. El beneficio máximo es de 40.
b) $S = 4{,}5\ u^2$

Septiembre 1995. Las funciones de oferta, q = S(p), y demanda, q = D(p), que determinan la cantidad q de un producto en función de su precio p, son respectivamente:

$$S(p) = p - 3 \quad ; \quad D(p) = \frac{4}{p}$$

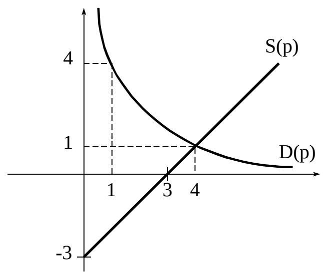
Se pide:

a) Calcular el precio de equilibrio (cuando la oferta y la demanda se igualan), y para este precio la cantidad de producto demandada y ofertada. *(2 puntos)*

b) En el mismo sistema de ejes cartesianos, representar gráficamente S(p) y D(p) para p > 0, haciendo previamente un estudio del crecimiento, decrecimiento, convexidad y concavidad de cada una de las dos funciones. *(4 puntos)*

c) Calcular el área de la región limitada por las gráficas de S(p), D(p) y la recta p = 1. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) Precio de equilibrio: p = 4. Cantidad de producto: 1
b)



c) $S \;\; 4.\ln 4 + 3/2\ u^2 \;\; 7{,}04\ u^2$

Septiembre 1995. Considerar la función $f(x) = \dfrac{1+x^2}{x^2}$. Se pide:

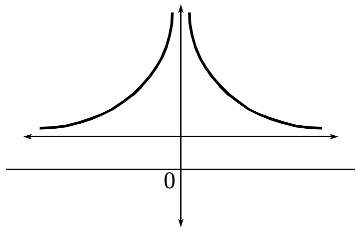
a) Dar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, de concavidad y convexidad de la función. Razonar si existen máximos, mínimos y puntos de inflexión. *(4 puntos)*

b) Razonar si existen asíntotas y en caso de que existan, calcularlas. *(2 puntos)*

c) Representar la gráfica de la función. *(1 punto)*

d) Calcular $\int_1^4 \dfrac{1+x^2}{x^2}\,dx$. Explicar qué representa este valor. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) Creciente: $(-\infty, 0)$; Decreciente: $(0, \infty)$; Cóncava $\forall x$; No hay máximos, ni mínimos ni puntos de inflexión.
b) Asíntota vertical: x = 0 ; Asíntota horizontal: y = 1
c)



d) 15/4 . Es el área del recinto limitado por la función, el eje OX y las rectas x = 1 y x = 4.

Junio 1996. a) Encontrar un número tal que al restarle su cuadrado la diferencia sea máxima. Razonar la respuesta. *(5 puntos)*
b) Calcular el área del recinto plano limitado por las gráficas de $y = x^2 - 9$, $y = 7$. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) 0,5 b) $\frac{256}{3}$ u^2

Junio 1996. El coste total de fabricación de q unidades de un cierto artículo es $C(q) = 3q^2 + 5q + 75$ dólares. Se define coste medio por unidad como el cociente C(q) / q . Se pide:

a) ¿En qué nivel de producción será menor el coste medio por unidad?. Razonar la respuesta. *(7 puntos)*
b) ¿Tiene la función coste medio por unidad puntos de inflexión?. Razonar la respuesta. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) 5 unidades. b) No tiene puntos de inflexión.

Septiembre 1996. Considerar la función $f(x) = x^3 - 3x$. Se pide:

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Razonar si existen máximos y mínimos y, en caso afirmativo, calcularlos. *(3 puntos)*
b) Razonar si existen puntos de inflexión. En caso de que existan, calcularlos. *(2 puntos)*
c) Calcular el área de la superficie comprendida entre la gráfica f(x) y el eje OX. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) CRECIENTE: $(-\infty , -1)$ $(1 , \infty)$; DECRECIENTE: $(-1 , 1)$; MÁXIMO: $(-1 , 2)$; MÍNIMO: $(1 , -2)$
b) PUNTO DE INFLEXIÓN: (0 , 0)
c) $S = 9/2\ u^2$

Septiembre 1996. La función de beneficios de una empresa es $B(x) = \frac{3x-6}{x+1}$ donde x representa los años de vida de la empresa ($x \geq 0$) y B(x) está expresado en millones de pesetas. Se pide:

a) Determinar cuándo la empresa tiene ganancias y cuándo pérdidas. *(3 puntos)*
b) Determinar si B(x) tiene máximos, mínimos y puntos de inflexión en su dominio de definición. *(4 puntos)*
c) ¿Están los beneficios limitados?. Razonar la respuesta. Si lo están, ¿cuál es su límite?. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) Tiene pérdidas los dos primeros años. A partir de entonces, tiene ganancias.
b) No tiene extremos relativos ni puntos de inflexión.
c) Sí están limitados. 3 millones.

Junio 1997. Sea la función $f(x) = \ln (1 + x^2)$. Se pide:

a) Determinar el dominio de definición de f(x). *(1 punto)*
b) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x). Razonar si existen máximos y mínimos. En caso afirmativo, calcularlos. *(6 puntos)*
c) Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en x = 0. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) Dom (f) = $\mathbb{R}$ b) DECRECIENTE: $(-\infty , 0)$; CRECIENTE: $(0 , \infty)$; MÍNIMO RELATIVO: (0 , 0)
c) y = 0 (el eje OX)

Junio 1997. Una empresa emplea un único factor para producir un bien de acuerdo con la función de producción $q(x) = 4\sqrt{x}$, donde x es el número de unidades de factor utilizadas en el proceso de producción y q(x) representa el número de unidades de bien obtenidas en dicho proceso. Cada unidad del bien se vende a 100 unidades monetarias y una unidad de factor cuesta 50. Se pide:

a) Determinar una función que represente los beneficios de la empresa en función de la cantidad de factor que se utiliza. *(3 puntos)*
b) ¿Qué cantidad de factor se ha de utilizar para maximizar los beneficios de la empresa?, ¿cuál es el máximo beneficio que alcanza la empresa?. Explicar los pasos seguidos para obtener las respuestas. *(7 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) $B(x) = 400\sqrt{x} - 50x$ b) 16 unidades. Beneficio máximo = 800

Septiembre 1997. Considerar la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2$. Se pide:

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x). Razonar si existen máximos y mínimos de f(x) y, en caso afirmativo, calcularlos. *(5 puntos)*
b) ¿Existen puntos de inflexión de f(x)?. Razonar la respuesta. *(3 puntos)*
c) Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en $x = -1$. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) CRECIENTE: $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$; DECRECIENTE: $(0, 1)$; MÁXIMO: $(0, 0)$; MÍNIMO: $(1, -1)$
b) PUNTO DE INFLEXIÓN: $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
c) $12x - y + 7 = 0$

Septiembre 1997. Considerar la función $f(x) = ax^2 + b\ln x$. Se pide:

a) Calcular los valores de a y b para que f(x) tenga un punto de inflexión en el punto (1 , 2) . *(6 puntos)*
b) Para a = 1 y b = 0, calcular $\int_2^4 f(x)\,dx$. Interpretar geométricamente esta integral. *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) a = 2 ; b = 4
b) $I = \frac{56}{3}$. Es el área del recinto limitado por la función $f(x) = x^2$, el eje OX y las rectas x = 2 y x = 4.

Junio 1998. Dada la función $f(x) = 2x^2 + 4\ln x$, se pide:

a) ¿Cuál es el dominio de definición de f(x)?. *(1 punto)*
b) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x). Razonar si existen máximo y mínimo y, en caso afirmativo, calcularlos. *(3 puntos)*
c) Determinar los intervalos de concavidad y convexidad de f(x). Razonar si existen puntos de inflexión y, en caso afirmativo, calcularlos. *(4 puntos)*
d) Determinar, si existen, las asíntotas de f(x). *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) Dom f = $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ b) La función es creciente en todo su dominio. No hay máximos ni mínimos.
c) CONVEXA: (0 , 1) ; CÓNCAVA: (1 , ∞) ; PUNTO DE INFLEXIÓN: (1 , 2)
d) Asíntota vertical: $x = 0^+$ pues: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

Junio 1998. a) Un cultivador de frutas cítricas estima que si plantan 60 naranjos en un huerto, la producción media por árbol será de 400 naranjas y ésta disminuirá en un promedio de 5 naranjas por árbol por cada árbol adicional plantado en el huerto. Se pide:

i) Determinar la función de producción total de naranjas. *(2 puntos)*

ii) ¿Cuántos árboles se deben plantar en el huerto para maximizar la producción total de naranjas?, ¿cuál es dicha producción máxima?. Razonar la respuesta. *(4 puntos)*

b) Calcular el área limitada por la gráfica de la función $y=\sqrt{x}$ y las rectas x = 0, x = 1, y = 0. *(4puntos)*

> **SOLUCIÓN.**
> a) i) $f(x) = 24000 + 100x - 5x^2$ donde x representa el número de árboles que excede a 60.
> ii) 70 árboles. Producción máxima: 24.500 naranjas
> b) $\frac{2}{3}\ u^2$

Septiembre 1998. Sea la función $f(x)=\begin{cases} e^{2x} & \text{si } x<0 \\ x^2+a & \text{si } 0\le x\le 3 \\ \dfrac{x+5}{x-3} & \text{si } x>3 \end{cases}$ con a un parámetro real. Se pide:

a) Determinar, razonadamente, el valor del parámetro a para que f(x) sea continua en x = 0. *(3 puntos)*

b) ¿Para qué valores del parámetro a es continua f(x) en x = 3?. Razonar la respuesta. *(3 puntos)*

c) Determina el valor del parámetro a para que $\int_0^3 f(x)\,dx=15$ *(4 puntos)*

> **SOLUCIÓN.**
> a) a = 1 b) f(x) es discontinua en x = 3 $\forall$a pues en x = 3^+ la función tiene una asíntota vertical c) a = 2

Septiembre 1998. Sea la función $f(x)=\dfrac{x^2}{x+4}$. Se pide:

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f(x). Razonar si existen máximos y mínimos y, en caso de que existan, calcularlos. *(5 puntos)*

b) ¿Tiene f(x) puntos de inflexión?. Justificar la respuesta. *(2 puntos)*

c) Determinar, si existen, las asíntotas de f(x). *(3 puntos)*

> **SOLUCIÓN.**
> a) CRECIENTE: $(-\infty , -8) \cup (0 , \infty)$; DECRECIENTE: $(-8 , 0)$; MÁXIMO: $(-8 , -16)$; MÍNIMO: $(0 , 0)$
> b) No c) VERTICAL: $x = -4$. OBLICUA: $y = x - 4$

Junio 1999. Sea la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}+b & \text{si } x\le -1 \\ 3x^2+4 & \text{si } -1<x<1 \\ -x^3+8 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$ donde b es un parámetro real. Se pide:

a) Calcular el valor del parámetro b para que f(x) sea continua en x = -1 y en x = 1. *(4 puntos)*

b) Calcular el área del recinto plano limitado por y = f(x), y = 0, x = 0, x = 2. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta. *(6 puntos)*

> **SOLUCIÓN.**
> a) b = 6 b) $S=\frac{37}{4}\ u^2$

Junio 1999. Una empresa ha decidido mejorar su seguridad instalando 9 alarmas. Un especialista en el tema señala que dada la estructura de la empresa sólo puede optar por dos tipos de alarmas, de tipo A o de tipo B; además, afirma que la seguridad de la empresa se puede expresar como el producto entre el número de alarmas de tipo A instaladas y el cuadrado del número de alarmas instaladas de tipo B. ¿Cuántas alarmas de cada tipo se deben instalar en la empresa para maximizar su seguridad? Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta. *(10 puntos)*

SOLUCIÓN.
3 alarmas tipo A y 6 alarmas tipo B

Septiembre 1999. Dada la función $f(x)=\frac{bx}{x^2+1}$ con b un parámetro real distinto de 0. Se pide:

a) Determinar las asíntotas de la función f(x) para cualquier valor del parámetro b. *(4 puntos)*
b) Determinar el valor del parámetro b para que la función f(x) tenga un máximo en el punto (1 , 3). *(6 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) Asíntotas verticales: no tiene ; Asíntota horizontal: y = 0 pues $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ b) b = 6

Septiembre 1999. Dada la función $f(x)=-x^2+x+1$, se pide:

a) Determinar, en caso de que existan, los máximos y mínimos de la función f(x) en el intervalo $[-1\,,\,4]$. *(4 puntos)*
b) Calcular el área del recinto limitado por: y = f(x) , y = f'(x). Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta. *(6 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) Máximo en $\left(\frac{1}{2}\,,\,\frac{5}{4}\right)$ b) $\frac{9}{2}\ u^2$

Junio 2000. Considerar la función polinómica de tercer grado $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, siendo a, b, c y d parámetros reales. Se pide:

a) Determinar los valores de los parámetros para que f(x) tenga un máximo en el punto (0 , 4) y un mínimo en el punto (2 , 0). *(7 puntos)*
b) Para a = b = c = d = 1, razonar si f(x) tiene puntos de inflexión y, en caso afirmativo, calcularlos. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) a = 1 ; b = −3 ; c = 0 ; d = 4 b) Tiene un punto de inflexión en $\left(-\frac{1}{3}\,,\,\frac{20}{27}\right)$

Junio 2000. a) Determinar el área limitada entre las parábolas $y=x^2-4$, $y=4-x^2$. *(5 puntos)*

b) Determinar una función f(x) que verifica: $f'(x)+x^3-3=0$, $f(1)=\frac{3}{4}$ *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) $\frac{64}{3}\ u^2$ b) $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+3x-2$

Septiembre 2000. Considerar la función $f(x)=x^3+px^2+qx+1$, siendo p y q números reales. Se pide:

a) ¿Qué valores deben tomar p y q para que f(x) tenga un mínimo en el punto (1, 1)? Razonar la respuesta. *(7 puntos)*
b) Para p = 3 y q = 2, razonar si f(x) tiene puntos de inflexión y, en caso afirmativo, calcularlos. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) $p = -2$, $q = 1$ b) Punto de inflexión en $(-1 , 1)$.

Septiembre 2000. a) De entre todos los pares de números que suman 30, calcular aquel par cuyo producto sea máximo. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta. *(5 puntos)*
b) Calcular el área del recinto plano limitado por las gráficas de $y = x^2$, $y = x$. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) 15 y 15. b) $\frac{1}{6}\ u^2$

Junio 2001. Sea una función f(x) tal que su primera derivada es $f'(x) = 4x + b$, con b un parámetro real. Se pide:

a) Determinar el valor del parámetro b para que f(x) tenga un mínimo en x = 1. *(3 puntos)*
b) ¿Puede tener f(x) un máximo en x = −1?. Razonar la respuesta. *(2 puntos)*
c) Determinar el valor del parámetro b para que 0 y −1 sean raíces de f(x). *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) $b = -4$ b) No, f(x) solo tiene un punto crítico pues f’(x) es de primer grado. c) $b = 2$

Junio 2001. Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-25}{x-5} & \text{si } x\neq 5 \\ 0 & \text{si } x=5 \end{cases}$, se pide:

a) Demostrar que f(x) no es continua en x = 5. *(3 puntos)*
b) ¿Existe una función continua que coincida con f(x) para todos los valores $x \neq 5$?. En caso afirmativo, dar su expresión. *(3 puntos)*
c) ¿Existe alguna asíntota oblicua de f(x)?. En caso afirmativo, calcularla. *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) No es continua porque $\lim\limits_{x\to 5} f(x)\neq f(5)$ b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-25}{x-5} & \text{si } x\neq 5 \\ 10 & \text{si } x=5 \end{cases}$ c) Asíntota oblicua: $y = x + 5$

Septiembre 2001. a) Calcular, si existen, los puntos de inflexión de la función $f(x)=2x^2+\ln x$ *(5 puntos)*
b) Determinar una función polinómica cuya derivada sea $x-1$ y cuya gráfica pase por el punto $(1 , 1)$.
(5 puntos)

SOLUCIÓN.
a) Tiene un punto de inflexión en $x=\frac{1}{2}$ b) $F(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}$

Septiembre 2001. Dada la función $f(x)=x^3-6x^2+8x$, se pide:

a) Probar que la recta $y=-x$ es tangente a la curva $y=f(x)$ en algún punto. *(4 puntos)*
b) Determinar el área del recinto plano limitado por la curva $y=f(x)$ y el eje de abscisas. *(6 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) Es tangente en el punto $(3\ ,\ -3)$ b) S = 8 u^2

Junio 2002. Se considera la función $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$.

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x). *(3 puntos)*
b) Determinar los intervalos de concavidad y convexidad de f(x). ¿Existen puntos de inflexión?. Razonar la respuesta. *(5 puntos)*
c) Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en x = 0. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) La función es creciente $\forall$x.
b) Cóncava: $(-\infty\ ,\ -1)$; convexa: $(-1\ ,\ \infty)$. No tiene puntos de inflexión pues $f''(x) \neq 0$ $\forall$x.
c) y = 2x – 1 .

Junio 2002. Dada la función $f(x)=ax^3+bx+11$, donde a y b son parámetros reales, se pide:

a) Determinar el valor de los parámetros a y b para que f(x) tenga un extremo relativo en el punto (2 , 5). ¿Es máximo o mínimo? *(5 puntos)*
b) Considerando b = 0, determinar el valor del parámetro a para que f(x) tenga una primitiva cuya gráfica pase por el origen y por el punto (1 , 1). *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) $a=\dfrac{3}{8}$, $b=-\dfrac{9}{2}$. Se trata de un mínimo. b) a = −40

Septiembre 2002. La demanda de un bien en función de su precio viene dada por $D(p)=\dfrac{30p+10}{p}$.

a) Demostrar que al aumentar el precio disminuye la demanda. *(2 puntos)*
b) Suponiendo que el precio aumenta indefinidamente, decir qué ocurrirá con la demanda. *(3 puntos)*
c) Escribir los ingresos de una empresa en función del precio suponiendo que dicha empresa es la única que produce este bien. *(1 punto)*
d) Calcular el precio para que la empresa del apartado anterior maximice sus beneficios sabiendo que los costes vienen dados por $C(p) = p^2/4$. *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) Hay que comprobar que la función es decreciente $\forall$p b) La demanda se aproximaría cada vez más a 30.
c) $I(p)=\dfrac{30p^2+10p}{p}$ d) p = 60

Septiembre 2002. Se considera $f(x)=ax^4-\dfrac{9x^2}{2}+b$

a) Calcular el valor de los parámetros a y b para que f(x) tenga un mínimo en el punto (3 , −8). *(6 puntos)*
b) Para a = 4 y b = 0, calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x). *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{49}{4}$ b) Decreciente: $\left(-\infty\ ,\ -\frac{3}{4}\right)\cup\left(0\ ,\ \frac{3}{4}\right)$; Creciente: $\left(-\frac{3}{4}\ ,\ 0\right)\cup\left(\frac{3}{4}\ ,\ \infty\right)$

Junio 2003. Se considera la función $f(x)=ax^2+\frac{b}{x}$, con a y b parámetros reales.

a) Determinar si para a = 1, existe algún valor de b para el que f(x) tenga un mínimo en x = 1. *(4 puntos)*
b) Si b = 1, ¿existe algún valor de a para el que f(x) tenga un punto de inflexión en x = 2? *(3 puntos)*
c) Para a = 2 y b = 0, calcular $\int_0^2 f(x)\,dx$ e interpretar geométricamente el resultado. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) b = 2. b) $a=-\frac{1}{8}$

c) $\frac{16}{3}$. Es el área limitada por la parábola $y = 2x^2$, el eje de abscisas y las rectas x = 0 y x = 2.

Junio 2003. El precio unitario de un bien, en función de la cantidad q que se oferta en el mercado, viene dado por la función $p(q)=\frac{1000+3q}{2q}$

a) Demostrar que al aumentar la cantidad ofertada, disminuye el precio. *(2 puntos)*
b) Decir cuál será el precio de ese bien si la cantidad que hay en el mercado es ilimitada, por ejemplo si se puede importar cualquier cantidad por grande que sea. *(1,5 puntos)*
c) Escribir, en función de la cantidad ofertada, los ingresos que genera ese bien, si se vende toda la cantidad que hay en el mercado. ***(1 punto)***
d) Calcular el precio para el que una empresa maximiza sus beneficios, suponiendo que es la única que ofrece ese bien y que los costes vienen dados por la función $C(q)=4(q+100)-150\ln q$. *(5,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Hay que demostrar que la función p(q) es decreciente $\forall$q. b) $\frac{3}{2}$

c) $I(q)=\frac{3}{2}q+500$ d) $p \approx 9{,}83$

Septiembre 2003. Se considera la función $f(x)=\frac{x^2}{4-x}$

a) Calcular su dominio de definición. Razonar la respuesta. *(1 punto)*
b) Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f(x). Razonar si existen máximos y mínimos de f(x) y, en caso afirmativo, decir cuáles son. *(4,5 puntos)*
c) Determinar los intervalos de concavidad y convexidad de f(x). Razonar si existe punto de inflexión. *(4,5 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) $D(f) = \mathbb{R} - \{4\}$
b) Decreciente: $(-\infty\ ,\ 0)\cup(8\ ,\ \infty)$; Creciente: $(0\ ,\ 8)$; Máximo: $(8\ ,\ -16)$; mínimo: $(0\ ,\ 0)$
c) Cóncava: $(-\infty\ ,\ 4)$; convexa: $(4\ ,\ \infty)$; No tiene puntos de inflexión pues $f''(x) \neq 0\ \forall x$.

Septiembre 2003. Sea $f(x)=\begin{cases} x^2+ax & \text{si } x<2 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$

a) Calcular los valores del parámetro a para los que f(x) es continua en x = 2. *(2,5 puntos)*
b) ¿Para qué valor del parámetro a la función f(x) tiene un máximo o mínimo en x = −1?. Determinar si es máximo o mínimo. *(3,5 puntos)*
c) Para a = 4, determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f(x). *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) $a=-\dfrac{3}{2}$ b) a = 2. Se trata de un mínimo. c) Decreciente: $(-\infty\ ,\ -2)\cup(2\ ,\infty)$; Creciente: $(-2\ ,\ 2)$

Junio 2004. Sea $f(x)=\begin{cases} x^3-3x+2 & \text{si } x<3 \\ \dfrac{10}{a-x} & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$

a) Calcular los valores del parámetro a para los que f(x) es continua en x = 3. *(2,5 puntos)*
b) Para a = 0, calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x). *(4,5 puntos)*
c) Para a = 4, calcular las asíntotas verticales y horizontales de f(x). *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) $a=\dfrac{7}{2}$ b) Creciente: $(-\infty\ ,\ -1)\cup(1\ ,3)\cup(3,\infty)$; Decreciente: $(-1\ ,\ 1)$
c) Asíntota vertical: x = 4 ; Asíntota horizontal: y = 0

Junio 2004. Sea $f(x)=x\cdot e^{-ax}$, con a un parámetro real.

a) Calcular los valores del parámetro a para que f(x) tenga un máximo o un mínimo en x = 3. Para estos valores del parámetro, decir si x = 3 es máximo o mínimo. *(4 puntos)*
b) Para a = −2, escribir los intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad de f(x). *(6 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) $a=\dfrac{1}{3}$. Se trata de un máximo.
b) Decreciente: $\left(-\infty\ ,\ -\dfrac{1}{2}\right)$; Creciente: $\left(-\dfrac{1}{2}\ ,\infty\right)$; Convexa: $(-\infty\ ,\ -1)$; Cóncava: $(-1\ ,\infty)$

Septiembre 2004. Se considera la función $f(x)=\dfrac{2x}{x+5}$

a) Razonar a qué es igual el dominio de definición de f(x). *(1,25 puntos)*
b) Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f(x). *(2,5 puntos)*
c) Determinar los intervalos de concavidad y de convexidad de f(x) y los puntos de inflexión. *(3,25 puntos)*
d) Determinar los valores de a y b para que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto $x=-3$ sea $y=ax+b$ *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) $Dom(f)=\Re-\{-5\}$ b) La función es creciente en todo su dominio
c) Cóncava en $(-\infty,-5)$ y convexa en $(-5,\infty)$. No tiene puntos de inflexión. d) $a=\dfrac{5}{2}$, $b=\dfrac{9}{2}$

Septiembre 2004. Se considera la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+2$, con *a* y *b* parámetros reales.
a) ¿Existen valores de *a* y *b* para los que f(x) tenga un máximo en $x=1$ y un mínimo en $x=-1$? *(5 puntos)*
b) Determinar los valores de *a* y *b* para que f(x) tenga un punto de inflexión en $(2\,,1)$. ***(3 puntos)***
c) Para $a=b=1$, ¿existen asíntotas verticales de f(x)?, y ¿asíntotas horizontales?. ***(2 puntos)***

SOLUCIÓN.
a) Sí: $a=0$, $b=-3$ b) $a=-6$, $b=\frac{15}{2}$ c) No hay asíntotas ni verticales ni horizontales.

Junio 2005. Se considera la función $f(x)=a\,\ln x+x^3$, siendo a un parámetro real.

a) Escriba el dominio de definición de f(x). *(0,75 puntos)*
b) Compruebe si hay algún valor de a para el que f(x) tiene punto de inflexión en x = 1. *(3,25 puntos)*
c) Para $a=-3$ calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de la función f(x). *(3,5 puntos)*
d) Para a = 1 calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ *(2,5 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) $D(f)=(0\,,+\infty)$ b) a = 6   c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x+x^3)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 0}(\ln x+x^3)=-\infty$

Junio 2005. Se sabe que la función de beneficios de una empresa es de la forma $B(x)=ax+b\sqrt{x}$, siendo x el número de unidades producidas y a y b parámetros reales.

a) Calcule, si existen, los valores de los parámetros a y b para que una producción de x = 100 proporcione un beneficio de 50 unidades monetarias y que además sea el máximo que se puede obtener. *(6 puntos)*
b) Para $a=-1$ y $b=16$, calcule las cantidades que se han de producir para que el beneficio aumente o disminuya (intervalos de crecimiento y decrecimiento) y los puntos de inflexión de B(x), si existen. *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) $a=-\frac{1}{2}$, $b=10$ b) Aumenta hasta x = 64 y disminuye desde x = 64. No tiene puntos de inflexión.

Septiembre 2005. Se considera la función $f(x)=-\frac{x^4}{2}+5x^3-18x^2+28x+9$

a) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los máximos y mínimos. *(4,75 puntos)*
b) Determine los intervalos de concavidad y de convexidad y los puntos de inflexión. *(3,75 puntos)*
c) Escriba la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto x = 1. *(1,5 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) Creciente: $\left(-\infty,\frac{7}{2}\right)$. Decreciente: $\left(\frac{7}{2},\infty\right)$. Máximo en $x=\frac{7}{2}$
b) Convexa: $(-\infty,2)\cup(3,\infty)$. Cóncava: $(2\,,3)$. Puntos de inflexión en x = 2 y en x = 3.
c) $10x-2y+37=0$

Septiembre 2005. Sea $f(x)=\begin{cases} x^2-2 & \text{si } x<0 \\ \dfrac{2x-1}{x+a} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

a) ¿Existe algún valor del parámetro a para el que f(x) sea continua en x = 0? *(2,5 puntos)*

b) Para $a=\frac{1}{2}$, calcule los intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad de f(x). *(6 puntos)*

c) Para a = 2, compruebe si $x=\frac{1}{2}$ es asíntota vertical de f(x). *(1,5 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) $a=\frac{1}{2}$ b) Decreciente: $(-\infty,0)$. Creciente: $(0,\infty)$. Cóncava: $(-\infty,0)$. Convexa: $(0,\infty)$
c) $x=\frac{1}{2}$ no es una asíntota vertical.

Junio 2006. Se considera la función $f(x)=ax^3+b\cdot\ln x$ siendo a y b parámetros reales.

a) Determine los valores de a y b sabiendo que $f(1)=2$ y que la derivada de f(x) es nula en $x=1$. *(3 puntos)*

b) Para $a=\frac{4}{3}$ y $b=1$, determine los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de f(x) *(5 puntos)*

c) Para $a=b=-2$, calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) $a=2$, $b=-6$ b) Convexa: $\left(0,\frac{1}{2}\right)$. Cóncava: $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$. Punto de inflexión en $x=\frac{1}{2}$
c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$

Junio 2006. Se considera la función $f(x)=\left(x^2+a\right)\cdot e^{ax}$ siendo a un parámetro real.

a) Razone a qué es igual el dominio de f(x). *(1,25 puntos)*

b) Determine el valor de a para que la gráfica de f(x) pase por el punto $(0,-4)$ *(1,25 puntos)*

c) Para $a=-2$, determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f(x). ¿Existen máximos y mínimos relativos de f(x)?, en caso afirmativo, decir dónde se alcanzan y su valor. *(7,5 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) Dom (f) = $\mathbb{R}$ b) $a=-4$
c) Decreciente: $(-\infty,-1)\cup(2,\infty)$; Creciente: $(-1,2)$; Mínimo relativo: $\left(-1,-e^2\right)$; Máximo relativo: $\left(2,\frac{2}{e^4}\right)$

Septiembre 2006. Se considera la función $f(x)=\dfrac{x^2}{a-bx}$ siendo a y b parámetros reales.

a) Determine los valores de los parámetros a y b para los que $f(2)=-4$ y la recta tangente a la gráfica de f(x) en $x=6$ es horizontal. *(4 puntos)*

b) Para $a=1$ y $b=-1$.

b_1) Razone cuál es el dominio de f(x) y la existencia de asíntotas verticales. *(2 puntos)*

b_2) Determine los intervalos de concavidad y de convexidad y los puntos de inflexión de f(x). *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) $a=-3$, $b=-1$ b) b_1) $D(f)=\Re-\{-1\}$; $x=-1$ asíntota vertical.
b_2) Convexa: $(-\infty,-1)$; Cóncava: $(-1,\infty)$; no tiene puntos de inflexión.

Septiembre 2006. En una factoría la función de costes es $C(x)=x^3-3\cdot\ln x$, donde $x>0$ es el número de toneladas que se producen.

a) Calcule el coste mínimo, si existe, y el número de toneladas que se han de producir para alcanzar dicho coste. *(5 puntos)*

b) Si la función de ingresos es $I(x)=x^3+12x$ escriba la función de beneficios. *(1 punto)*

c) Calcule los intervalos en los que la función de beneficios es creciente o decreciente y diga si existe beneficio máximo y en caso afirmativo el número de toneladas que se han de producir para alcanzar dicho beneficio. *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) El coste mínimo es 1 con una producción de 1 tn. b) $B(x)=12x+3\ln x$ c) Creciente $\forall x>0$

Junio 2007. a) Derive las funciones $f(x)=2\sqrt{x}-\ln x$, $g(x)=\dfrac{6-x^5}{x^6}$, $h(x)=e^{x^3}$ *(1,5 puntos)*

b) Razone a qué es igual el dominio y calcule los valores de x, si existen, para los que f(x) alcanza máximo o mínimo relativo. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$; $g'(x)=\dfrac{x^3-36}{x^7}$; $h'(x)=3x^2\cdot e^{x^3}$
b) $D(f)=\mathbb{R}^+$. En $x=1$ mínimo relativo.

Junio 2007. a) Derive las funciones $f(x)=\dfrac{x^3}{4}-8$, $g(x)=\sqrt{x^3}$, $h(x)=x^2-e^x$ *(1,5 puntos)*

b) Diga si la función $m(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } 0\le x\le 4 \\ g(x) & \text{si } 4<x \end{cases}$ es continua en x = 4 *(0,75 puntos)*

c) Escriba la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función m(x) en x = 9. *(1,25 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) $f'(x)=\dfrac{3}{4}x^2$; $g'(x)=\dfrac{3}{2}x\sqrt{x}$; $h'(x)=2x-e^x$ b) Sí es continua. c) $81x-2y-675=0$

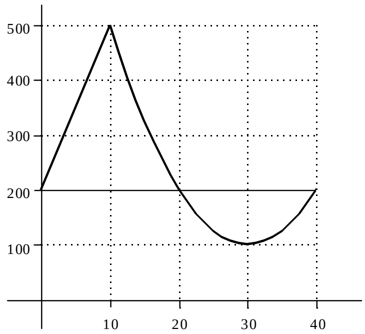
Septiembre 2007. a) Derive las funciones $f(x)=\dfrac{x^2}{3x^2+1}$, $g(x)=x\left(5-x^2\right)^4$, $h(x)=5\sqrt{\ln x}$ *(1,5 puntos)*

b) La oferta de un bien conocido su precio, p, es $S(p)=\begin{cases} 30p+200 & \text{si } 0\le p\le 10 \\ p^2-60p+1000 & \text{si } 10<p\le 40 \end{cases}$. Represéntela y a la vista de su gráfica, diga para qué valor del precio se alcanza la máxima y la mínima oferta y para cuáles la oferta es menor que 200 unidades. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $f'(x)=\dfrac{2x}{\left(3x^2+1\right)^2}$, $g'(x)=\left(5-x^2\right)^3\cdot\left(5-9x^2\right)$, $h'(x)=\dfrac{5}{2x\sqrt{\ln x}}$

b)



La máxima oferta se alcanza para un precio de 10 u.m. y la mínima oferta para un precio de 30 u.m.
Para $20<p<40$

Septiembre 2007. a) Derive las funciones $f(x)=\dfrac{x}{6}-8x^2+\dfrac{1}{x}$, $g(x)=\dfrac{x}{\ln x}$, $h(x)=x\,e^{3x}$ *(1,5 puntos)*

b) Razone a qué es igual el dominio de la función f(x) y calcule los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de dicha función. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $f'(x)=\dfrac{-96x^3+x^2-6}{6x^2}$; $g'(x)=\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}$; $h'(x)=e^{3x}\left(3x+1\right)$

b) $D(f)=\mathbb{R}-\{\,0\,\}$. Convexa: $\left(-\infty\,,0\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$. Cóncava: $\left(0\,,\dfrac{1}{2}\right)$; Punto de inflexión en $x=\dfrac{1}{2}$.

Junio 2008.

<u>**CUESTIÓN B1**</u>**:** a) Derive las funciones $f(x)=x^2\cdot\ln\left(1-x\right)$, $g(x)=\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{8}{x^2}$, $h(x)=2^{2x-1}$ *(1,5 puntos)*

b) La velocidad (en metros/minuto) de un juguete viene dada por $V(t)=\begin{cases}10t-t^2 & \text{si } t\in\left[0,2\right]\cup\left[8,10\right]\\ 16 & \text{si } t\in\left(2,8\right)\end{cases}$,

siendo la variable t el número de minutos transcurrido desde que se pone en marcha.

b_1) Represente la función velocidad. *(0,75 puntos)*

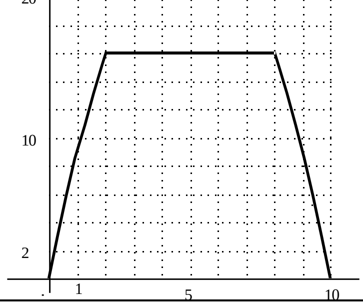
b_2) A la vista de la gráfica, diga cuál es la velocidad máxima y en qué momento o momentos se alcanza. *(0,5 puntos)*

b_3) Calcule la velocidad del juguete pasados 30 segundos desde su puesta en marcha. ¿Hay algún otro momento en el que lleva la misma velocidad?, en caso afirmativo, diga en cuál. *(0,75 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $f'(x)=2x\cdot\ln\left(1-x\right)-\dfrac{x^2}{1-x}$; $g'(x)=\dfrac{x}{4}+\dfrac{16}{x^3}$; $h'(x)=2^{2x-1}\cdot 2\cdot\ln 2$

b_1)



b_2) Velocidad máxima: 16 m/min. Entre los 2 y los 8 minutos.

b_3) 4,75 m/min. A los 9 min. 30 seg.

CUESTIÓN B2: a) Derive las funciones $f(x)=7x-x^2+\dfrac{9}{x}$, $g(x)=(1-x)^2\cdot e^x$, $h(x)=\dfrac{1}{(x+1)^{20}}$ *(1,5 puntos)*

b) Razone a qué es igual el dominio de la función $f(x)$ del apartado anterior, y diga los puntos en los que alcanza máximo o mínimo relativo. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $f'(x)=7-2x-\dfrac{9}{x^2}$; $g'(x)=(x^2-1)\cdot e^x$; $h'(x)=-\dfrac{20}{(x+1)^{21}}$

b) $D(f)=\mathbb{R}-\{\,0\,\}$. $x=-1$: máximo relativo ; $x=3$: máximo relativo ; $x=\dfrac{3}{2}$: mínimo relativo.

Septiembre 2008.

CUESTIÓN B1: a) Derive las funciones $f(x)=\dfrac{2x-2}{x+1}$, $g(x)=\sqrt{1-5x^4}$ *(1 punto)*

b) Razone a qué es igual el dominio y calcule los intervalos de concavidad y convexidad de la función $f(x)$ del apartado anterior, así como los puntos de inflexión. *(2,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $f'(x)=\dfrac{4}{(x+1)^2}$; $g'(x)=-\dfrac{10x^3}{\sqrt{1-5x^4}}$

b) $D(f)=\mathbb{R}-\{\,-1\,\}$. Cóncava: $(-\infty,-1)$; Convexa: $(-1,+\infty)$; No tiene puntos de inflexión.

CUESTIÓN B2: a) Derive las funciones $f(x)=x-8x^2+\dfrac{9}{x}$, $g(x)=(2x-1)^2\cdot \ln x$ *(1 punto)*

b) Sea la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{x}+\dfrac{x}{3} & \text{si } x\in(-6,-1)\\ x-1 & \text{si } x\in[-1,4]\end{cases}$

b₁) Razone si $f(x)$ es continua o discontinua en $x=-1$ y en $x=4$. *(1,25 puntos)*

b₂) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ para los valores $x\in(-6,-1)$. *(1,25 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $f'(x)=1-16x-\dfrac{9}{x^2}$; $g'(x)=(2x-1)\left[4\ln x+\dfrac{2x-1}{x}\right]$

b₁) Es discontinua en $x=-1$ y continua por la izquierda en $x=4$.

b₂) Creciente en $(-6,-3)$ y decreciente en $(-3,-1)$.

Junio 2009.

CUESTIÓN B1: a) Derive las funciones $f(x)=4\sqrt{x}-\ln x^2$, $g(x)=(x-1)e^{x^2}$, $h(x)=\dfrac{x^6}{3-x^3}$ *[1,5 puntos]*

b) Razone a qué es igual el dominio y calcule los valores de x, si existen, para los que la función $f(x)$ del apartado anterior, alcanza máximo o mínimo relativo. *[2 puntos]*

SOLUCIÓN.

a) $f'(x)=\dfrac{2\sqrt{x}-2}{x}$; $g'(x)=e^{x^2}\left(1+2x^2-2x\right)$; $h'(x)=\dfrac{3x^5\left(6-x^3\right)}{\left(3-x^3\right)^2}$

b) $D(f)=(0,+\infty)$; $x=1$ mínimo relativo.

CUESTIÓN B2: a) Derive las funciones $f(x)=\ln\sqrt{x}$, $g(x)=x^2\left(5-x^3\right)$, $h(x)=3^{5x-1}$ *[1,5 puntos]*

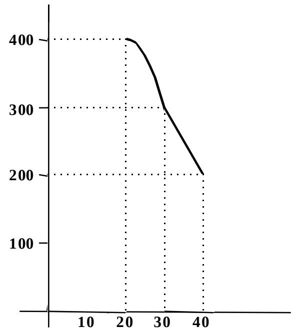
b) La demanda de un bien conocido su precio, p, viene dada por $D(p)=\begin{cases} 40p-p^2 & \text{si } 20\le p\le 30 \\ 600-10p & \text{si } 30<p\le 40 \end{cases}$.

Represéntela. A la vista de su gráfica diga para qué valor del precio se alcanza la máxima y la mínima demanda y para cuáles la demanda es mayor que 375 unidades. *[2 puntos]*

SOLUCIÓN.

a) $f'(x)=\dfrac{1}{2x}$; $g'(x)=10x-5x^4$; $h'(x)=3^{5x-1}\cdot 5\cdot\ln 3$

b)



Máxima demanda para un precio de 20 unidades monetarias.
Mínima demanda para 40 unidades monetarias.
Para un precio entre 20 y 25 unidades monetarias.

Septiembre 2009.

Cuestión B1: **a)** Derive las funciones $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x-2}$ y $g(x)=(x-5)^2\ln x$ *(1 punto)*

b) Sea la función $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2+1} & \text{si } x\in(-2,2) \\ \dfrac{x+2}{x-1} & \text{si } x\in[2,4] \end{cases}$

b1) Razonar si f es continua en $x=2$ y en $x=4$. *(1,25 puntos)*

b2) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ para los valores $x\in(-2,2)$. *(1,25 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $f'(x)=\dfrac{x^2-4x-4}{(x-2)^2}$; $g'(x)=(x-5)\left(2\ln x+\dfrac{x-5}{x}\right)$

b1) En $x=2$ tiene una discontinuidad inevitable con salto finito. En $x=4$ es continua por la izquierda.

b2) Decreciente en $(-2,0)$ y creciente en $(0,2)$.

Cuestión B2: **a)** Derive las funciones $f(x)=(1-x)^3e^x$, $g(x)=x+8x^2+\dfrac{1}{x}$, $h(x)=\dfrac{3}{x}+\dfrac{x}{x-2}$ *(1,5 puntos)*

b) Razone a qué es igual el dominio de la función $g(x)$ del apartado anterior y calcule sus intervalos de concavidad y convexidad, así como sus puntos de inflexión. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $f'(x)=(1-x)^2(-2-x)e^x$; $g'(x)=1+16x-\dfrac{1}{x^2}$; $h'(x)=-\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2}{(x-2)^2}$

b) $D(g)=\mathbb{R}-\{\,0\,\}$; Cóncava: $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)\cup(0,+\infty)$; Convexa: $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$

Junio 2010. a) Derive las siguientes funciones: *(1,5 puntos)*

$$f(x)=\ln^2 x-\ln(\ln x)\ ,\qquad g(x)=\ln\frac{x^2}{\sqrt{x+3}}\ ,\qquad h(x)=\sqrt{e^{3x}-\frac{5+\ln x}{3x+5}}$$

b) Razone cuál es el dominio de la función $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x-6}$. Calcule, si existen, los máximos y mínimos relativos de f en su dominio. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $f'(x)=\dfrac{2\ln^2 x-1}{x\ln x}$; $g'(x)=\dfrac{3x+3}{2x^2+6x}$; $h'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{e^{3x}-\dfrac{5+\ln x}{3x+5}}}\cdot\left(3e^{3x}-\dfrac{-12x+5-3x\ln x}{x(3x+5)^2}\right)$

b) $D(f)=\mathbb{R}-\{-2\,,3\}$; $\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{4}{25}\right)$ máximo relativo

Junio 2010. a) Derive las siguientes funciones: *(1,5 puntos)*

$$f(x)=\frac{\sqrt{3x^3}-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{x^3}}\ ,\qquad g(x)=\ln\frac{3x^2}{x-5}\ ,\qquad h(x)=e^{5x}+\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

b) Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x\le 2 \\ \dfrac{x+3}{x^2-3} & \text{si } x>2 \end{cases}$

Estudie la continuidad de f en $x=2$. Analice el crecimiento de la función $f(x)$ si $x>2$. ¿Tiene f algún máximo o mínimo relativo si $x>2$?. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $f'(x)=\dfrac{7\sqrt[3]{2}}{6x^2\sqrt[6]{x}}$; $g'(x)=\dfrac{x-10}{x^2-5x}$; $h'(x)=5e^{5x}-\dfrac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}$

b) La función es continua en $x=2$. Es decreciente. No.

Septiembre 2010. a) Derive las siguientes funciones: *(1,5 puntos)*

$$f(x)=\ln\frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}}\qquad g(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{x}}\qquad h(x)=e^{\sqrt{x^2+1}}$$

b) Razone cuál es el dominio de definición de la función $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+x^2$. Calcule, si existen, los máximos y mínimos relativos de f. ¿Tiene algún punto de inflexión?. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $f'(x)=\dfrac{2x^2+6}{x(x^2+2)}$; $g'(x)=\dfrac{2\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}$; $h'(x)=\dfrac{x\cdot\sqrt{x^2+1}\cdot e^{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$

b) $D(f)=\mathbb{R}-\{0\}$. Mínimos relativos en $x=-1$ y en $x=1$. No tiene puntos de inflexión.

Septiembre 2010. a) Derive las siguientes funciones: *(1,5 puntos)*

$$f(x)=x\ln\left(x+\sqrt{x}\right)\qquad g(x)=e^{x^3}\ln\left(x^2+1\right)\qquad h(x)=\ln\left(e^x+\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right)$$

b) Considere la función: $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1} & \text{si } -1\le x\le 3\\ \dfrac{2x}{x^2-6} & \text{si } 3<x\le 10\end{cases}$

b1) Estudie la continuidad de f en $x=3$. *(0,75 puntos)*

b2) Calcule la recta tangente a $f(x)$ en $x=4$. *(1,25 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $f'(x)=\ln\left(x+\sqrt{x}\right)+\dfrac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}+2}$; $g'(x)=xe^{x^3}\left[3x\ln\left(x^2+1\right)+\dfrac{2}{x^2+1}\right]$; $h'(x)=\dfrac{1}{e^x+\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}}\cdot\left(e^x+\dfrac{1}{2x^2\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}}\right)$

b) b_1) Es continua. b_2) $11x+25y-64=0$

Junio 2011

1. **a)** Derive las siguientes funciones $f(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$, $g(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, *(1 punto)*

b) Calcule $\displaystyle\int_1^3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\right)dx$. *(0,5 puntos)*

2. Halle el dominio de definición, los máximos y mínimos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=\ln\left(1-x^2\right)$. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

1. **a)** $f'(x)=-\dfrac{1}{2x\left(\sqrt{x}+1\right)}$ $g'(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\left(x+xe^{\frac{1}{x}}\right)^2}$ **b)** $2\sqrt{3}-\ln 3-2$

2. $D(f)=(-1,1)$. Máximo relativo: $(0,0)$; Creciente en $(-1,0)$, decreciente en $(0,1)$

Junio 2011.

1. **a)** Calcule las derivadas de las funciones $f(x)=\ln\dfrac{x^2}{\sqrt{x+3}}$, $g(x)=\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}}$. *(1 punto)*

b) Calcule $\displaystyle\int_0^1\left(x-e^{-2x}\right)dx$. *(0,5 puntos)*

2. Estudios realizados han permitido determinar que el nivel medio diario de monóxido de carbono, CO_2, en el aire en partes por millón (ppm) en una ciudad, está relacionado con la población *p* expresada en miles de habitantes por la siguiente expresión $C(p)=\sqrt{\dfrac{p^2}{2}+17}$. La evolución del tamaño de población en esta ciudad en *t* años se estima que está dado por la relación $p(t)=3{,}1+0{,}1t^2$ en miles de habitantes. ¿Con qué rapidez estará variando la concentración de CO_2 en esta ciudad dentro de 3 años?. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

1. **a)** $f'(x)=\dfrac{3x+12}{2x^2+6x}$; $g'(x)=-\dfrac{3}{4x\sqrt[4]{x^3}}$ **b)** $\dfrac{1}{2e^2}$

2. 0,24 ppm

Septiembre 2011.

1. **a)** Derive las funciones: $f(x)=\ln^2(1+x)$, $g(x)=\left(\dfrac{x}{\left(x^3-x+1\right)^2}\right)^3$. *(1 punto)*

b) Calcule $\int_1^2\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)dx$. *(0,5 puntos)*

2. Halle los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función $f(x)=(x-2)^2(x-1)$. Calcule sus intervalos de crecimiento y decrecimiento así como los de concavidad y convexidad. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

1. **a)** $f'(x)=\dfrac{2\ln(1+x)}{1+x}$; $g'(x)=\dfrac{3x^2\left(-5x^3+x+1\right)}{\left(x^3-x+1\right)^7}$ **b)** $\ln 2-\dfrac{1}{2}$

2. Máximo: $x=\dfrac{4}{3}$; Mínimo: $x=2$; Punto de inflexión: $x=\dfrac{5}{3}$.

Creciente en $\left(-\infty,\dfrac{4}{3}\right)\cup(2,+\infty)$; Decreciente en $\left(\dfrac{4}{3},2\right)$; Convexa en $\left(-\infty,\dfrac{5}{3}\right)$; cóncava en $\left(\dfrac{5}{3},+\infty\right)$

Septiembre 2011.

1. a) Derive las funciones $f(x)=\sqrt{x^3e^{-x}}$, $g(x)=\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)^5$ *(1 punto)*

b) Calcule $\int_2^4\left(x^{1/2}+x^2\right)dx$. *(0,5 puntos)*

2. Determine el dominio de definición de la función $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$. Halle sus intervalos de concavidad y convexidad así como sus puntos de inflexión. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

1. **a)** $f'(x)=\dfrac{\left(xe^{-x}\right)(3+x)}{2\sqrt{xe^{-x}}}$; $g'(x)=5\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)^4\cdot\left(1+\dfrac{2}{x^3}\right)$ **b)** $24-\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

2. $D(f)=\mathbb{R}^+$. Convexa: $\left(0,e\sqrt{e}\right)$; cóncava: $\left(e\sqrt{e},+\infty\right)$; Punto de inflexión: $x=e\sqrt{e}$

Junio 2012. **a)** *(1 punto)* Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\ln x}}$ **a2)** $g(x)=\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{x}}}$

b) *(0,5 puntos)* Calcular $\int_0^1 xe^{5x^2}dx$.

c) Un fondo de inversión genera una rentabilidad que depende de la cantidad invertida según la fórmula $R(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{5x}$, donde x representa la cantidad invertida en miles de euros.

c1) *(1 punto)* ¿Qué cantidad de dinero se debería de invertir para obtener el máximo rendimiento?

c2) *(1 punto)* ¿Es posible perder dinero con este fondo de inversión?

SOLUCIÓN.

a) a1) $f'(x)=\dfrac{1}{2x\sqrt{(1-\ln x)^3}}$ **a2)** $g'(x)=-\dfrac{1}{4x\sqrt[4]{x}}$ **b)** $\dfrac{e^5-1}{10}$

c) c1) 4000 € **c2)** Se pierde dinero al invertir menos de 1000 €.

Junio 2012. a) *(1 punto)* Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a1) $f(x)=\ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right)$ **a2)** $g(x)=e^{\sqrt{x(1-x)}}$.

b) *(0,5 puntos)* Calcular $\displaystyle\int_1^2\left(x^2-5x+\frac{1}{x^2}\right)dx$.

c) Considerar la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-3}{(x-4)(x-5)} & \text{si } x\le 3\\[2mm] \dfrac{x^2-2}{(x+1)(x-3)} & \text{si } x>3\end{cases}$

c1) *(0,75 puntos)* Estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x=3$.

c2) *(1,25 puntos)* Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ así como los máximos y mínimos si $x<3$.

SOLUCIÓN.

a) a1) $f'(x)=-\dfrac{2e^x}{e^{2x}-1}$ **a2)** $g'(x)=e^{\sqrt{x-x^2}}\cdot\dfrac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}$ **b)** $-\dfrac{14}{3}$

c) c1) Es discontinua en $x=3$ (discontinuidad no evitable)

c2) Decreciente en $\left(-\infty,3-\sqrt{2}\right)$; Creciente en $\left(3-\sqrt{2},3\right)$; Mínimo relativo en $x=3-\sqrt{2}$

Septiembre 2012. a) *(1 punto)* Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a1) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ **a2)** $g(x)=\dfrac{x^{3/2}}{(x+1)^3}$

b) *(0,5 puntos)* Calcular $\displaystyle\int_1^4\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

c) Considerar la función $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

c1) *(0,5 puntos)* Hallar el dominio de definición de f.

c2) *(1 punto)* Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f así como sus máximos y mínimos.

c3) *(0,5 puntos)* Hallar los puntos de inflexión de f.

SOLUCIÓN.

a) **a1)** $f'(x)=-\dfrac{1}{1+x}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{1-x^2}}$ **a2)** $g'(x)=\dfrac{3\sqrt{x}\left(1+x-2x^3\right)}{2\left(x+1\right)^4}$ **b)** $2e\left(e-1\right)$

c) **c1)** $D(f)=\mathbb{R}-\{\,1\,\}$

c2) Creciente en $\left(-\infty,1\right)\cup\left(3,+\infty\right)$; Decreciente en $\left(1\,,3\right)$; Mínimo relativo en $x=3$

c3) Punto de inflexión en $x=0$

Septiembre 2012. **a)** *(1 punto)* Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a1) $f(x)=\dfrac{1}{x}+2\ln x-\dfrac{\ln x}{x}$ **a2)** $g(x)=\dfrac{e^x}{\left(x-1\right)^2}$.

b) *(0,5 puntos)* Calcular $\int_0^2\left(4x^3+e^{3x}\right)dx$.

c) Se ha realizado una encuesta a una determinada población con el fin de determinar el número de personas que utilizarían el sistema de autobuses si la tarifa admitiera distintos importes. Basándose en los resultados de las encuestas, los analistas de sistemas han determinado una función aproximada que expresa el número diario de pasajeros en función de la tarifa. La función demanda viene dada por $D(x)=\sqrt{10+3x-\dfrac{5}{4}x^2}$, donde x representa la tarifa en euros.

c1) *(1 punto)* ¿Qué tarifa habrá que aplicar para obtener el mayor número de pasajeros?

c2) *(1 punto)* Si la tarifa aplicada está entre 1 y 2 euros, ¿cómo es la variación en la afluencia de pasajeros? ¿Creciente, decreciente?

SOLUCIÓN.

a) **a1)** $f'(x)=\dfrac{-2+2x+\ln x}{x^2}$ **a2)** $g'(x)=\dfrac{e^x\cdot\left(x-3\right)}{\left(x-1\right)^3}$ **b)** $\dfrac{e^6+47}{3}$

c) **c1)** 1,20 € **c2)** Entre 1 y 1,20 € es creciente. Entre 1,20 y 2 € es decreciente.

Junio 2013. **a)** *(2 puntos)* Disponemos de 15000 euros para la campaña de publicidad de un producto y los tenemos que invertir entre televisión y radio. Si llamamos x al dinero (en miles de euros) invertido en televisión e y al dinero (en miles de euros) invertido en radio, se estima que las ventas (en miles de unidades del producto) que haremos vendrán dadas por:

$$V=x^2y+27y+20$$

Determinar cuánto dinero tenemos que invertir en televisión y en radio para maximizar las ventas y cuál será el valor máximo de ventas que obtendremos.

b) *(1,5 puntos)* Calcular $\int_0^1\dfrac{2}{\left(x+1\right)^2}\,dx$.

SOLUCIÓN.
a) 9000 € en televisión y 6000 € en radio. Valor máximo: 668000 unidades **b)** 1

Junio 2013. Dada la función $f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}$, determinar:

a) *(0,5 puntos)* Su dominio.
b) *(0,5 puntos)* Sus cortes con los ejes.
c) *(1,25 puntos)* Sus asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
d) *(1,25 puntos)* Sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

SOLUCIÓN.
a) $D(f)=\mathbb{R}-\{-1\}$ **b)** $(-2,0)$ y $(0,2)$ **c)** Asíntota vertical: $x=-1$; Asíntota horizontal: $y=1$
d) La función es decreciente en su dominio.

Septiembre 2013. Tenemos que invertir en un fondo de inversión una cantidad de dinero mayor o igual que 1000 euros y menor o igual que 9000 euros. El beneficio B que se obtiene depende de la cantidad invertida x de la siguiente manera:

$$B(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si } 1\le x<4 \\ -x^2+10x-21 & \text{si } 4\le x\le 9 \end{cases}$$

donde tanto x como B(x) están expresadas en miles de euros.
a) *(1 punto)* Estudiar la continuidad de la función B en el intervalo $(1,9)$
b) *(1 punto)* ¿Para qué valores de $x\in[1,9]$ el beneficio es positivo?
c) *(1,5 puntos)* Encontrar el máximo valor que alcanza el beneficio con $x\in[4,9.]$

SOLUCIÓN.
a) Continua en $(1,9)$
b) Beneficio positivo para $x\in(1,7)$
c) Beneficio de 4000 € con una inversión de 5000 €

Septiembre 2013. **a)** *(2 puntos)* Encontrar los extremos absolutos de la función $f(x)=-2x^2+12x-16$ en el intervalo $x\in[1,4]$
b) *(1,5 puntos)* Calcular: $\int_1^2\left(\frac{4}{x}-6x\right)dx$

SOLUCIÓN.
a) Máximo absoluto en $x=3$ y mínimo absoluto en $x=1$
b) $4\ln 2-9\simeq-6{,}227$

Junio 2014.

a) *(2 puntos)* Dada la función $f=x^2y$ definida para $x\ge 0$, $y\ge 0$, encontrar el punto (x,y) que maximiza f sujeto a la restricción $x+y=36$.
b) *(1,5 puntos)* Calcular: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+6x}-2x\right)$

SOLUCIÓN.
a) $(24,12)$ **b)** $\frac{3}{2}$

Junio 2014.
Dada la función: $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x-5}$, calcular:
a) *(0,5 puntos)* Dominio de f.
b) *(1 punto)* ¿Para qué valores de x es la función positiva?
c) *(0,75 puntos)* Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

d) *(1,25 puntos)* Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

SOLUCIÓN.
a) $\mathbb{R}-\{5\}$ **b)** $(-4,4)\cup(5,+\infty)$ **c)** Asíntota vertical: $x=5$; Asíntota oblicua: $y=x+5$
d) Creciente: $(-\infty,2)\cup(8,+\infty)$; Decreciente: $(2,8)-\{5\}$

Septiembre 2014.

a) *(2 puntos)* Dada la función: $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x}$, encontrar los extremos absolutos de f en el intervalo $x\in[1,5]$.

b) *(1,5 puntos)* Calcular: $\int_1^4 \left(2-e^{3x}\right)dx$

SOLUCIÓN.
a) Máximo absoluto en $x=5$ y mínimo absoluto en $x=2$. **b)** $6-\dfrac{e^{12}-e^3}{3}$

Septiembre 2014.

a) *(2 puntos)* Dada la función: $f=xy$ definida para $x\in(0,9)$, $y\in(0,3)$, encontrar el punto (x,y) que maximiza f sujeto a la restricción $x+y^2=9$.

b) *(1,5 puntos)* Calcular: $\int_1^2 \left(7x^2+\dfrac{3}{x}\right)dx$

SOLUCIÓN.
a) $\left(6,\sqrt{3}\right)$ **b)** $\dfrac{49}{3}+3\ln 2$

Junio 2015.

a) *(1,25 puntos)* Dada la función $f(x)=3x^3+2x^2+ax+3$, calcular, si existe, el valor de *a* de forma que tenga un mínimo relativo en $x=2$.

b) *(1 punto)* Calcular: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+3}}{2x+5}$

c) *(1,25 puntos)* Calcular: $\int_1^2 \left(x^2+3x+\dfrac{6}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)dx$

SOLUCIÓN.
a) $a=-44$ **b)** $\dfrac{3}{2}$ **c)** $\dfrac{35}{6}+6\ln 2$

Junio 2015.

a) *(2,5 puntos)* Dada la función: $f(x)=\begin{cases} 2x+3 & \text{si } x\in(-\infty,0) \\ \dfrac{x+3}{2x+3} & \text{si } x\in[0,2) \\ \dfrac{2x+1}{x^2+12} & \text{si } x\in[2,+\infty) \end{cases}$

a.1) *(0,75 puntos)* Estudiar la continuidad de f

a.2) *(1,75 puntos)* Calcular el máximo valor que toma f para $x \in [4, 6]$.

b) *(1 punto)* Calcular: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{9x^2 + 4x + 1} - 3x \right)$

SOLUCIÓN.

a.1) La función es discontinua (salto finito) en $x = 2$. **a.2)** $f(4) = \dfrac{9}{28}$

b) $\dfrac{2}{3}$

Septiembre 2015.

(3,5 puntos) Dada la función: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{bx+3}{1-x} & \text{si } x \in (-\infty, 0] \\ x+3 & \text{si } x \in (0, 3] \\ \dfrac{ax+3}{x^2+1} & \text{si } x \in (3, +\infty) \end{cases}$

a) *(1 punto)* Calcular a para que la función sea continua en $x = 3$.

b) *(1,5 puntos)* Calcular b para que la función sea derivable en $x = 0$.

c) *(1 punto)* Calcular: $\int_1^2 \left(\dfrac{3}{x} + e^{5x} + 8x \right) dx$

SOLUCIÓN.

a) $a = 19$ **b)** $b = -2$ **c)** $3\ln 2 + \dfrac{e^{10} - e^5}{5} + 12$

Septiembre 2015.

(3,5 puntos) Sea la función: $f(x) = \dfrac{2x+5}{x^2-4}$

Calcular:

a) *(0,5 puntos)* Su dominio.

b) *(1 punto)* ¿Para qué valores de x es $f(x)$ mayor que 0?

c) *(1,25 puntos)* Sus máximos y mínimos relativos, si existen.

d) *0,75 puntos)* Sus asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, si existen.

SOLUCIÓN.

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ **b)** $x \in \left(-\dfrac{5}{2}, -2 \right) \cup (2, +\infty)$

c) Máximo relativo: $\left(-4, -\dfrac{1}{4} \right)$; mínimo relativo: $(-1, -1)$

d) Asíntotas verticales: $x = -2$ y $x = 2$. Asíntota horizontal: $y = 0$.

Junio 2016.
(3,5 puntos)
a) *(2 puntos)* Encontrar los extremos absolutos de la función $f(x)=2x^3+3x^2-12x+8$ en el intervalo $x\in[-4\,,2]$

b) *(1,5 puntos)* Calcular: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+9x}-2x\right)$

SOLUCIÓN.
a) Mínimo absoluto: $(-4\,,-24)$, máximo absoluto: $(-2\,,28)$ **b)** $\dfrac{9}{4}$

Junio 2016.
(3,5 puntos) Dada la función f, definida para $x\geq 0$:

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si } 0\leq x\leq 5 \\ 9-\dfrac{25}{x} & \text{si } 5<x\leq 10 \\ 4\sqrt{x+6}-\dfrac{x}{5} & \text{si } x>10 \end{cases}$$

a) *(0,75 puntos)* ¿Para qué valores de $x>0$ es la función f continua?
b) *(1,75 puntos9* ¿Cuál es el máximo valor que toma $f(x)$ para $x\in[30\,,100]$?
c) *(1 punto)* Calcula: $\int_6^8 f(x)\,dx$

SOLUCIÓN.
a) $(0\,,+\infty)-\{10\}$ **b)** En $x=94$: 21,2 **c)** $18-25\ln\dfrac{4}{3}$

Septiembre 2016.
(3,5 puntos) Dada la función: $f(x)=\dfrac{x^2+2}{4x+2}$, calcular:
a) *(0,5 puntos)* Dominio de f.
b) *(0,75 puntos)* ¿Para qué valores de x es la función positiva?
c) *(1 punto)* Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
d) *(1,25 puntos)* Sus máximos y mínimos relativos, si existen.

SOLUCIÓN.
a) $D(f)=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$ **b)** $\forall x\in\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ **c)** **Vertical:** $x=-\dfrac{1}{2}$ **Oblicua:** $y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{8}$
d) Máximo relativo: $(-2\,,-1)$, mínimo relativo: $\left(1\,,\dfrac{1}{2}\right)$

Septiembre 2016.
(3,5 puntos)
a) *(2 puntos)* Dada la función $f(x)=ax^3+bx$, encontrar a y b de forma que $f(2)=4$ y f tenga un mínimo relativo en $x=1$.

b) *(1,5 puntos)* Calcular: $\int_1^2\left(e^{3x}+\dfrac{7}{x}+\dfrac{3}{4x^4}-9\right)dx$

SOLUCIÓN.

a) $a = 2$, $b = -6$ **b)** $\dfrac{e^6 - e^3}{3} + 7\ln 2 + \dfrac{7}{32} - 9$