

ÁLGEBRA

Junio 94. [1,5 puntos] Comprueba que el determinante $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$ es nulo sin desarrollarlo. Explica el proceso que sigues.

SOLUCIÓN.

Se basa en la propiedad: "si a una línea le sumamos una combinación lineal de las demás paralelas, el determinante no varía". Suma a la primera columna (por ejemplo) las paralelas a ella y todos sus elementos son iguales a cero, con lo que el determinante será cero.

Junio 94.

1. [1,5 puntos] Considerar la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Probar que las matrices de la forma $B = kA + rI$, donde k y r son números reales e I es la matriz unidad 2×2 , conmutan con la A , es decir $A \cdot B = B \cdot A$

2. [2,5 puntos] Discutir y resolver el siguiente sistema dependiente del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + \lambda y = 0 \\ \lambda x + y = -2 \\ 2x + \lambda z = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN.

1. Construye la matriz B y comprueba que $A \cdot B = B \cdot A$

2. ▶ Si $\lambda \neq -1, 1, 0$: el sistema es compatible determinado. Soluciones: $x = \frac{2\lambda}{1-\lambda^2}$, $y = \frac{-2}{1-\lambda^2}$, $z = \frac{-4}{1-\lambda^2}$

▶ Si $\lambda = -1, 1$: el sistema es incompatible

▶ Si $\lambda = 0$: el sistema es compatible indeterminado. Soluciones: $x = 0$, $y = -2$, $z = k$

Septiembre 94. Dada la matriz $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular:

a) [1 punto] La potencia enésima A^n .

b) [0,5 puntos] La inversa A^{-1} .

SOLUCIÓN.

$$\text{a) } A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Septiembre 94.

1. [1,5 puntos] Sea A una matriz cuadrada. Demuestra que las matrices AA^t y A^tA son simétricas, donde A^t denota la matriz traspuesta de A . ¿Son iguales?. Pon un ejemplo.

2. [2,5 puntos] Hallar el valor de m para que el siguiente sistema tenga infinitas soluciones y calcularlas

$$\begin{cases} 2x - my + 4z = 0 \\ x + y + 7z = 0 \\ x - y + 12z = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN.

1. $(A \cdot A^t)^t = (A^t)^t \cdot A^t = A \cdot A^t \Rightarrow A \cdot A^t$ es simétrica

$(A^t \cdot A)^t = A^t \cdot (A^t)^t = A^t \cdot A \Rightarrow A^t \cdot A$ es simétrica

No tienen por qué ser iguales: $A \cdot A^t \neq A^t \cdot A$. Puede comprobarse con la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. $m = -6$. Soluciones: $x = -\frac{19k}{5}$, $y = k$, $z = \frac{2k}{5}$

Junio 95.

1. [2 puntos] Sea U una matriz cuadrada $n \times n$ con todos sus elementos iguales a 1, sea I_n la matriz unidad $n \times n$, y sea α un número real. Escribir la matriz $\alpha U - \alpha I$, y calcular su determinante.

2. [2,5 puntos] Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro α , y resolver cuando sea posible

$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = \alpha \\ x + y + 2z = \alpha^2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN.

1. $\alpha U - \alpha I = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \dots & \alpha \\ \alpha & 0 & \dots & \alpha \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha & \alpha & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad |\alpha U - \alpha I| = (n-1)\alpha \cdot (-\alpha)^{n-1}$

2. ▶ Si $\alpha \neq 0, 1$: sistema compatible determinado. Soluciones: $x = \frac{1-\alpha^2}{2\alpha}$, $y = \frac{-\alpha^2 + 2\alpha + 1}{2\alpha}$, $z = \frac{(\alpha-1)(\alpha+1)^2}{2\alpha}$

▶ Si $\alpha = 0$: sistema incompatible.

▶ Si $\alpha = 1$: sistema compatible indeterminado. Soluciones: $x = k$, $y = 1 - k$, $z = 0$

Junio 95. [1,5 puntos] Encontrar todas las matrices A tal que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-x & 2-2y \\ x & y \end{pmatrix}$$

Septiembre 95.

1. Se dice que una matriz $n \times n$ cuadrada A es ortogonal si $A A^t = I$, donde A^t es la matriz traspuesta de A e I es la matriz unidad $n \times n$. Se pide:

a) [1 punto] Estudiar si la matriz traspuesta y la matriz inversa de una matriz ortogonal son matrices ortogonales.

b) [1 punto] $z = \frac{\alpha - 5}{\alpha(3 - \alpha)}$ Si A es ortogonal, hallar $|A|$.

2. [2,5 puntos] Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro α , y resolver cuando sea posible.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 4x + \alpha y = 5 \\ 3x + \alpha y - \alpha z = 5 \end{cases}$$

SOLUCIÓN.

1. a) Sí, son ortogonales. b) $|A| = \pm 1$

2. ▶ Si $\alpha \neq 0, 3$: sistema compatible determinado. Soluciones: $x = \frac{5 - \alpha}{3 - \alpha}$, $y = -\frac{\alpha + 5}{\alpha(3 - \alpha)}$, $z = \frac{\alpha - 5}{\alpha(3 - \alpha)}$

▶ Si $\alpha = 0$ ó $\alpha = 3$: sistema incompatible. No tiene solución.

Septiembre 95. [2 puntos] Calcular, sin desarrollar, el valor del siguiente determinante, enumerando las propiedades de los determinantes utilizadas:

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

SOLUCIÓN.

120

Junio 96. [1,5 puntos] Sin desarrollarlo, calcular razonadamente el valor del determinante de la matriz

$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & b+a \end{pmatrix}$. [1 punto] Deducir de ahí los posibles valores del rango de A

SOLUCIÓN.

$|A| = 0$. Si $a = b = c$: $\text{rg}(A) = 1$; en cualquier otro caso: $\text{rg}(A) = 2$.

Junio 96. [2 puntos] Hallar el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & a^2 + a + 1 & a \\ -1 & a - 4 & a - 2 \end{pmatrix}$ según sea el valor del parámetro

a. [0,5 puntos] Indicar cuándo existe la inversa de A

SOLUCIÓN.

▶ Si $a \neq -1, 1$: $\text{rg}(A) = 3 \Rightarrow \exists A^{-1}$ ▶ Si $a = -1$: $\text{rg}(A) = 2$ ▶ Si $a = 1$: $\text{rg}(A) = 1$

Septiembre 96. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y O la matriz nula 2×2 . Se pide:

- a) [1,5 puntos] Encontrar todas las matrices X tales que $A X = B$
b) [1 punto] Encontrar todas las matrices Y tales que $Y B = O$

SOLUCIÓN.

$$\text{a) } X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{b) } Y = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}$$

Septiembre 96. [1,5 puntos] Hallar el valor o valores de a para que el sistema
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y + (a+1)z = 1 \\ -x - y + (a+1)z = a \end{cases}$$
 sea compatible e indeterminado. [1 punto] Resolverlo en esos casos.

SOLUCIÓN.

Si $a = -1$: el sistema es compatible indeterminado. Soluciones: $x = 1$, $y = 0$, $z = k$

Junio 97. [1,5 puntos] Discutir el sistema
$$\begin{cases} ax - y + z = 0 \\ x + y + az = 3 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$
 según los valores del parámetro a .

[1 punto] Resolverlo en los casos en que admita infinitas soluciones.

SOLUCIÓN.

- ▶ Si $a \neq -1, 2$: sistema compatible determinado. ▶ Si $a = -1$: sistema incompatible.
- ▶ Si $a = 2$: sistema compatible indeterminado. Soluciones: $x = 1 - k$, $y = 2 - k$, $z = k$.

Junio 97. [1,5 puntos] Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, encontrar todas las matrices B tales que $A B = B A$.

[1 punto] Calcular A^n con n entero positivo.

SOLUCIÓN.

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix}; \quad A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Septiembre 97. [2,5 puntos]. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, hallar la matriz X

dada por $A X A^{-1} = B$

SOLUCIÓN.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ -1 & 6 & 3 \\ 2 & -10 & -5 \end{pmatrix}$$

Septiembre 97. [2,5 puntos] Hallar el rango de la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 1 & 1 & a & -1 \end{pmatrix}$ según sea el valor del parámetro a .

SOLUCIÓN.

► Si $a \neq 0, 1$: $\text{rg } B = 3$. ► Si $a = 0$ ó $a = 1$: $\text{rg } B = 2$

Junio 98. [1,5 puntos] Discutir el sistema $\begin{cases} x + (a^2 - 1)y + az = 1 \\ (a^2 - 1)y + (a - 1)z = 0 \\ x + a^2z = 0 \end{cases}$ según sea el valor del parámetro a .

[1 punto] Hallar, si existe, la solución del mismo cuando $a = 0$.

SOLUCIÓN.

- Si $a \neq -1, 1$: sistema compatible determinado.
- Si $a = -1$: sistema incompatible.
- Si $a = 1$: sistema incompatible.
- Para $a = 0$ el sistema es compatible determinado y sus soluciones son: $x = 0, y = -1, z = 1$.

Junio 98. [1,5 puntos] Determinar a, b y c para que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a & b & c \end{pmatrix}$ verifique que su traspuesta A^t coincide con su inversa A^{-1} . [1 punto] Calcular en todos esos casos la matriz A^4 .

SOLUCIÓN.

$a = 0, b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, c = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ (b y c distinto signo). $A_1^4 = I_3; A_2^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Septiembre 98. [1,5 puntos] Hallar los valores del parámetro a para que el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + z = 0 \\ ax + y + z = 0 \\ x + (a - 1)y + az = 0 \end{cases}$ admita infinitas soluciones. [1 punto] Resolverlo en cada uno de esos casos.

SOLUCIÓN.

El sistema tiene infinitas soluciones cuando $a = 0$ y cuando $a = 1$.
 ■ Para $a = 0$: $x = -k, y = -k, z = k$. ■ Para $a = 1$: $x = -k, y = 0, z = k$

Septiembre 98. [1 punto] Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, encontrar todas las matrices 2×2 X tales que $XA = X$ y [1,5 puntos] todas las matrices Y tales que $YA = B$.

SOLUCIÓN.

$X = \begin{pmatrix} -2a & a \\ -2b & b \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$

Junio 99. Las matrices X e Y son las soluciones del sistema de ecuaciones matriciales
$$\begin{cases} 2X - Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \\ X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Se pide [1 punto] hallar X e Y y [1,5 puntos] calcular si tiene sentido X^{-1} e Y^{-1} (razonar la posible respuesta negativa).

SOLUCIÓN.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \nexists X^{-1} \text{ pues } |X| = 0. \quad \exists Y^{-1} \text{ pues } |Y| \neq 0: \quad Y^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Junio 99. [1,5 puntos] Discutir según el valor del parámetro a el sistema lineal
$$\begin{cases} ax + 7y + 20z = 1 \\ ax + 8y + 23z = 1 \\ x - az = 1 \end{cases} \quad y$$

[1 punto] resolverlo en los casos en que tenga infinitas soluciones.

SOLUCIÓN.

- ▶ Si $a \neq -1, 1$: sistema compatible determinado. ▶ Si $a = -1$: sistema incompatible.
- ▶ Si $a = 1$: sistema compatible indeterminado. Soluciones: $x = 1 + k, y = -3k, z = k$

Septiembre 99. [1,5 puntos] Hallar en función de a el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & -3 \\ 4 & 1 & a \end{pmatrix}$ y [1 punto]

calcular cuando exista la matriz inversa A^{-1} en los casos $a = 1$ y $a = -1$.

SOLUCIÓN.

- ▶ Si $a \neq -1, -3$: $\text{rg } A = 3$ ▶ Si $a = -1$ ó $a = -3$: $\text{rg } A = 2$
- ▶ Para $a = 1$: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$ ▶ Para $a = -1$: No existe A^{-1} .

Septiembre 99. [2,5 puntos] Disponemos de tres lingotes de distintas aleaciones de tres metales A, B y C. El primer lingote contiene 20 g del metal A, 20 g del B y 60 del C. El segundo contiene 10 g de A, 40 g de B y 50 g de C. El tercero contiene 20 g de A, 40 g de B y 40 g de C. Queremos elaborar a partir de estos lingotes uno nuevo que contenga 15 g de A, 35 g de B y 50 g de C. ¿Cuántos gramos hay que coger de cada uno de los tres lingotes?.

SOLUCIÓN.

25 grs del A, 50 grs del B y 25 grs del C.

Junio 00. [2,5 puntos] Hallar, si existe, una matriz cuadrada 2×2 A que cumpla las siguientes condiciones:

1) Coincide con su traspuesta.

2) Verifica la ecuación matricial $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

3) Su determinante vale 9.

SOLUCIÓN.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$$

Junio 00. [1 punto] Discutir el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+z=1 \\ y+(a-1)z=0 \\ x+(a-1)y+az=a \end{cases}$ según los valores del parámetro a . [1,5 puntos]. Resolverlo en todos los casos de compatibilidad

SOLUCIÓN.

- ▶ Si $a \neq 1, 2$: sistema compatible determinado. Soluciones: $x = -\frac{a-1}{a-2}$, $y = -\frac{a-1}{a-2}$, $z = \frac{1}{a-2}$
- ▶ Si $a = 1$: sistema compatible indeterminado. Soluciones: $x = 1 - k$, $y = 0$, $z = k$
- ▶ Si $a = 2$: sistema incompatible.

Septiembre 00. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, se pide:

i) [1,5 puntos] Hallar el valor o valores de a para que se cumpla la igualdad $A^2 + 2A + I = O$, siendo I la matriz identidad de orden 3 y O la matriz nula de orden 3.

ii) [1 punto] Calcular en esos casos la matriz inversa de A .

SOLUCIÓN.

i) $a = -1$ ii) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Septiembre 00. Sea A una matriz 4×4 cuyas filas, de arriba a abajo son F_1, F_2, F_3 y F_4 y cuyo determinante

vale 2. Sea $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular razonadamente:

1) [1 punto] El determinante de la matriz $A \cdot B$

2) [0,5 puntos] El determinante de la matriz $3A$

3) [1 punto] El determinante de la matriz cuyas filas son (de arriba a abajo): $2F_1 + F_2$, $-F_2$, $3F_4$ y $F_3 + F_1$

SOLUCIÓN.

1) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = 2 \cdot (-1) = -2$

2) $|3A| = 162$

3) 12

Junio 01. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) [1 punto] Hallar A^n para todo entero positivo n .
b) [1,5 puntos] Calcular, si existe, la inversa de la matriz A y la de la matriz $I_3 + A$

SOLUCIÓN.

a) Para $n = 1$: $A^n = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; para $n = 2$: $A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; para $n \geq 3$: $A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\nexists A^{-1}$ pues $|A| = 0$. $(I_3 + A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Junio 01. Tenemos una matriz 3×3 cuyas columnas son (de izquierda a derecha): C_1, C_2, C_3 y su determinante vale 2.

- a) [1,5 puntos] Se considera la matriz A cuyas columnas son (de izquierda a derecha): $-C_2, C_3 + C_2, 3C_1$, calcular razonadamente el determinante de la matriz A^{-1} caso de que esta matriz inversa exista.
b) [1 punto] Sea ahora la matriz cuyas columnas son: $C_1 + C_2, C_2 + C_3, C_3 - C_1$. Razonar la existencia o no existencia de la matriz inversa de la misma

SOLUCIÓN.

a) $|A| = -6$; $|A^{-1}| = -\frac{1}{6}$

b) En este caso: $\nexists A^{-1}$ pues $|A| = 0$

Septiembre 01. Dado el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro a :
$$\begin{cases} x + 2y + z = a \\ x + y - az = a \\ 2x + 3y + z = a \end{cases}$$
, se pide:

- 1) [1 punto] Discusión del mismo en función del parámetro a .
2) [1,5 puntos] Resolución en los casos de compatibilidad.

SOLUCIÓN.

a) Si $a \neq 0$: sistema compatible determinado. Si $a = 0$: sistema compatible indeterminado.

b) Para $a \neq 0$: $x = -a - 1, y = a + 1, z = -1$. Para $a = 0$: $x = \lambda, y = -\lambda, z = \lambda$

Septiembre 01. Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) [1 punto] Calcular $A^2 - 4A + 4I_3$
b) [1,5 puntos] Calcular, si existe, la inversa de la matriz A .

SOLUCIÓN.

a) El resultado es la matriz nula 3×3 b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

Junio 02. a) [1,3 puntos] Discute el sistema
$$\begin{cases} (a^2 - 1)x + (a - 1)y = 0 \\ a^2y + z = 0 \\ (a^2 - 1)x + ay + z = 1 \end{cases}$$
 según el valor del parámetro a.

b) [1,2 puntos] Halla, si existe, la solución cuando $a = 4$.

SOLUCIÓN.

a) ▶ Si $a \neq -1$, 1: sistema compatible determinado. ▶ Si $a = -1$, 1: sistema incompatible.

b) $x = \frac{1}{75}$, $y = -\frac{1}{15}$, $z = \frac{16}{15}$

Junio 02. Sea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

a) [1 punto] Prueba que si $A, B \in M$ también $A+B$ y AB están en M .

b) [1,5 puntos] Determina las matrices $C \in M$ que verifican que $C^2 = 2C$.

SOLUCIÓN.

a) Comprueba que al sumar y multiplicar dos matrices de M sus resultados también pertenecen a M .

b) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Septiembre 02. Sean A y B las matrices siguientes: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

[2,5 puntos] Es fácil comprobar que ambas tiene el máximo rango, que es 3. Pero ¿qué ocurre si las combinamos linealmente? En concreto, estudia el rango de la matriz $A + \lambda B$ según los valores del parámetro λ .

SOLUCIÓN.

▶ Si $\lambda \neq -1$, 1: $\text{rg}(A+\lambda B) = 3$. ▶ Si $\lambda = -1$ ó $\lambda = 1$: $\text{rg}(A+\lambda B) = 2$

Septiembre 02. a) [1,5 puntos] Discute el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ ax - y - z = a - 1 \\ 3x - 2az = a - 1 \end{cases}$$
 según el valor del

parámetro a.

b) [1 punto] Halla, si existe, la solución cuando $a = 0$.

SOLUCIÓN.

a) ▶ Si $a \neq -3$, 1: sistema compatible determinado.

▶ Si $a = -3$: sistema incompatible

▶ Si $a = 1$: sistema compatible indeterminado.

b) $x = -\frac{1}{3}$, $y = \frac{5}{6}$, $z = \frac{1}{6}$

Junio 03. [2,5 puntos] Luis, Juan y Óscar son tres amigos. Luis le dice a Juan: Si yo te doy la tercera parte del dinero que tengo, los tres tendremos la misma cantidad. Calcular lo que tiene cada uno de ellos sabiendo que entre los tres reúnen 60 euros.

SOLUCIÓN.

Luis: 30 €, Juan: 10 €, Óscar: 20 €

Junio 03. [2,5 puntos] Buscar una matriz cuadrada X (pueden existir varias) cuyo primer elemento valga 2 y tal que la siguiente suma

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} X + X \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 11 & -1 \end{pmatrix}$$

sea la matriz nula

Nota: El primer elemento de una matriz es que el está en la primera fila y en la primera columna.

SOLUCIÓN.

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 2+2\lambda \\ 12+11\lambda & \lambda \end{pmatrix}$$

Septiembre 03. [1,5 puntos] Discutir el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} ax + y - z = 1 \\ x + 2y - az = 2 \\ -x + y - z = a - 1 \end{cases}$$
 según los valores del

parámetro a . [1 punto] Entre los valores de a que hacen el sistema compatible elegir uno en particular y resolver el sistema que resulte al reemplazar a por el valor elegido.

SOLUCIÓN.

► Si $a \neq -1, 2$: sistema compatible determinado.

► Si $a = -1$: sistema incompatible.

► Si $a = 2$: sistema compatible indeterminado.

Por ejemplo, para $a = 0$: $x = 2, y = 0, z = -1$

Septiembre 03. [1,5 puntos] Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. Vemos que ambas tienen

rango máximo, o sea 2. Determinar los valores de c tales que la matriz $A + cB$ ya no tenga rango 2.

[1 punto] ¿Cuál es el rango que tienen las respectivas matrices suma?

SOLUCIÓN.

$c = -1, c = 6$. El rango es 1.

Junio 04. Cuando el año 1800 *Beethoven* escribe su primera Sinfonía, su edad es diez veces mayor que la del jovencito *Franz Schubert*. Pasa el tiempo y es *Schubert* quien compone su célebre Sinfonía Incompleta. Entonces la suma de las edades de ambos músicos es igual a 77 años. Cinco años después muere *Beethoven* y en ese momento *Schubert* tiene los mismos años que tenía *Beethoven* cuando compuso su primera Sinfonía.

[2,5 puntos] Determinar el año de nacimiento de cada uno de estos dos compositores.

Nota: Solamente se calificarán los resultados obtenidos matemáticamente, no los derivados de los conocimientos histórico-musicales del examinando.

SOLUCIÓN.

Beethoven nació en 1770 y Schubert en 1797.

Junio 04. Sea el sistema
$$\begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ ax + 2z = 0 \\ ay + z = a \end{cases}$$
.

[1,5 puntos] Se pide clasificarlo según los valores del parámetro a y [1 punto] resolverlo si en algún caso es compatible indeterminado

SOLUCIÓN.

- ▶ Si $a \neq 0$ y 5 : sistema compatible determinado.
- ▶ Si $a = 0$: sistema compatible indeterminado. Soluciones: $x = 5 - 3\lambda$, $y = \lambda$, $z = 0$
- ▶ Si $a = 5$: sistema incompatible.

Septiembre 04. Sea el sistema homogéneo de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ ax - y + z = 0 \\ x + 2ay - z = 0 \end{cases}$$

- a) [1,5 puntos] Determinar el valor o valores del parámetro a para que el sistema tenga soluciones distintas de la nula.
b) [1 punto] Resolver el sistema para el valor o valores de a hallados en el apartado anterior.

SOLUCIÓN.

- a) $a = 0$; $a = -\frac{1}{4}$ b) Para $a = 0$: $x = y = z = \lambda$; Para $a = -\frac{1}{4}$: $x = \frac{4\lambda}{3}$, $y = \frac{2\lambda}{3}$, $z = \lambda$

Septiembre 04. [2 puntos] Determinar una matriz cuadrada X que verifique $AX + XA = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ siendo

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. [0,5 puntos] Luego analizar si la matriz X es inversible, y en el caso de serlo calcular su matriz inversa.

SOLUCIÓN.

$$X = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{1}{4} & 2 \end{pmatrix}. \quad X \text{ es inversible: } X^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 11 & 11 \end{pmatrix}$$

Junio 05. [2,5 puntos] Eva, Marta y Susana son tres jóvenes amigas que se comprometen a leer *el Quijote* este verano. Cada una por separado y en función del tiempo del que dispone, decide leer un mismo número de páginas cada día hasta terminar la obra. Eva leerá diariamente 5 páginas más que Marta y ésta 6 páginas más que Susana. Por ello Eva terminará la obra dos semanas antes que Marta y ésta 30 días antes que Susana. Se pregunta cuál es el total de páginas que tiene la versión de la inmortal obra cervantina que leen estas amigas.

SOLUCIÓN.

1400 páginas.

Junio 05. La terna $(0, 0, 0)$ es siempre solución del sistema

$$\begin{cases} x + 2y - az = 0 \\ ax - y + z = 0 \\ 2ax + y - z = 0 \end{cases}$$

independientemente del valor

del parámetro a .

- a) [1,5 puntos] Indicar para qué valores del parámetro la citada terna es la única solución del sistema.
b) [1 punto] Indicar algún valor del parámetro, si existe, para el cual el sistema tenga algunas soluciones distintas de la nula y mostrar estas soluciones. (Nota: si se encuentran varios valores del parámetro cumpliendo la condición pedida, para responder a esta cuestión basta tomar uno solo de ellos).

SOLUCIÓN.

- a) Para $a \neq 0$ y $a \neq 2$
 b) Para $a = 0$ y para $a = 2$. • Para $a = 0$: $x = -2\lambda$, $y = \lambda$, $z = \lambda$ • Para $a = 2$: $x = 0$, $y = \lambda$, $z = \lambda$

Septiembre 05. [2,5 puntos] A , B y C son tres ciudades que forman un triángulo de manera que entre cada dos de ellas hay una carretera recta que las une. Se sabe que si se va de A a B dando la vuelta por C se hace un recorrido tres veces mayor que si se va directamente de A a B . Asimismo si para ir de A a C se da la vuelta por B el recorrido es el doble que si se va directamente de A a C .
 Calcular las distancias entre las tres ciudades sabiendo que la suma de las tres distancias es igual a 120 kilómetros.

SOLUCIÓN.

$$d(A,B) = 30 \text{ kms}; d(A,C) = 40 \text{ kms}; d(B,C) = 50 \text{ kms}.$$

Septiembre 05. [2,5 puntos] Estudiar según el valor del parámetro λ , el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + z = \lambda^2 \end{cases} \text{ y resolverlo si en algún caso es compatible indeterminado.}$$

SOLUCIÓN.

- Si $\lambda \neq 1$: el sistema es compatible determinado
 ► Si $\lambda = 1$: el sistema es compatible indeterminado. Las soluciones son: $x = 1 - \alpha - \beta$, $y = \alpha$, $z = \beta$.

Junio 06. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ donde λ es un número real.

a) [1,5 puntos] Encontrar los valores de λ para los que la matriz AB tiene inversa.

b) [1 punto] Dados a y b números reales cualesquiera, ¿puede ser el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ compatible determinado con A la matriz del enunciado?.

SOLUCIÓN.

- a) AB tiene inversa $\forall \lambda \neq \frac{1}{2}, -2$ b) No, A tiene un rango máximo 2 y el nº de incógnitas es tres.

Junio 06. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab \\ ab & a^2 & b^2 \\ ab & b^2 & a^2 \end{pmatrix}$

- a) [1,5 puntos] Sin utilizar la regla de Sarrus, calcular el determinante de dicha matriz.
 b) [1 punto] Estudiar el rango de A en el caso en que $b = -a$.

SOLUCIÓN.

- a) $|A| = a^2 \cdot (a+b)^2 \cdot (a-b)^2$ b) $\text{rg}A = 1$

Septiembre 06. [2,5 puntos] La liga de fútbol de un cierto país la juegan 21 equipos a doble vuelta. Este año, los partidos ganados valían 3 puntos, los empatados 1 punto y los perdidos 0 puntos. En estas condiciones, el equipo campeón de liga obtuvo 70 puntos. Hasta el año pasado los partidos ganados valían 2 puntos y el resto igual. Con el sistema antiguo, el actual campeón hubiera obtenido 50 puntos. ¿Cuántos partidos ganó, empató y perdió el equipo campeón?

SOLUCIÓN.

20 partidos ganados, 10 empatados y 10 perdidos

Septiembre 06. [2,5 puntos] Teniendo en cuenta que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 7$, calcular el valor del siguiente determinante sin desarrollarlo

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix}$$

SOLUCIÓN.

-21

Junio 07. Considerar el sistema lineal de ecuaciones en x, y y z :

$$\begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ mx + 2z = 0 \\ my - z = m \end{cases}$$

- a) [1 punto] Determinar los valores del parámetro m para los que el sistema tiene solución única. Calcular dicha solución para $m=1$.
- b) [1 punto] Determinar los valores del parámetro m para los que el sistema tiene infinitas soluciones. Calcular dichas soluciones.
- c) [0,5 puntos] Estudiar si existe algún valor de m para el cual el sistema no tiene solución.

SOLUCIÓN.

a) $m \neq 0$ y $m \neq -1$. Si $m=1$: $x=-2, y=2, z=1$ b) $m=0$. $x=\lambda, y=\frac{5-\lambda}{2}, z=0$ c) $m=-1$

Junio 07. [2,5 puntos] Un cajero automático contiene 95 billetes de 10, 20 y 50 euros y un total almacenado de 2000 euros. Si el número total de billetes de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20, averiguar cuántos billetes de cada tipo hay.

SOLUCIÓN.

50 billetes de 10 €, 25 de 20 € y 20 de 50 €

Septiembre 07. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- a) [0,5 puntos] Comprobar que $\det(A^2) = (\det(A))^2$
- b) [1 punto] Estudiar si para cualquier matriz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de orden 2 se cumple que $\det(M^2) = (\det(M))^2$
- c) [1 punto] Encontrar la relación entre los elementos de las matrices M cuadradas de orden 2 que satisfacen: $\det(M+I) = \det(M) + \det(I)$

SOLUCIÓN.

- a) Calcular y comprobar. b) Sí se cumple (demostrar) c) $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$

Septiembre 07. Sean $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & k & t \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- a) [0,5 puntos] Estudiar para qué valores de α y β la matriz A tiene inversa.
b) [1 punto] Calcular A^5 .
c) [1 punto] Hallar la matriz inversa de B.

SOLUCIÓN.

- a) A no tiene inversa en ningún caso. b) A^5 es la matriz nula. c) $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -k & k^2 - t \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Junio 08.

Opción A. a) (1,5 puntos) Sean A, B, I las matrices: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Estudiar si existe algún valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ para el cual se satisfaga $(A - \lambda I)^2 = B$.

- b) (1 punto) Teniendo en cuenta que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$, determinar el valor de $\begin{vmatrix} x & 1/4 & 4 \\ y & 0 & 4 \\ z & 1/2 & 12 \end{vmatrix}$

SOLUCIÓN.

- a) $\lambda = 2$ b) 1

Opción B. (2,5 puntos) Dado el sistema $\begin{cases} x + 3y - az = 4 \\ -ax + y + az = 0 \\ -x + 2ay = a + 2 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{cases}$. Discutirlo según los valores de a, y

resolverlo cuando sea compatible.

SOLUCIÓN.

- Para $a \neq 2$ y $a \neq -3$: sistema incompatible.
- Para $a = 2$: sistema compatible indeterminado. Soluciones: $x = \frac{4+8\lambda}{7}$, $y = \frac{8+2\lambda}{7}$, $z = \lambda$
- Para $a = -3$: sistema compatible determinado. Soluciones: $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$

Septiembre 08.

Opción A. (2,5 puntos) Hallar una matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de orden 2 tal que $A^{-1} X A = B$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN.

$$X = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$$

Opción B. a) (1 punto) Probar que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

b) (1,5 puntos) Hallar la solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ x+4y+9z=2 \end{cases}$ que además satisfice que la suma de los valores correspondientes a cada una de las incógnitas es 4.

SOLUCIÓN.

a) Aplicar propiedades de los determinantes. b) $x=13$, $y=-14$, $z=5$

Junio 09.

Opción A. a) [1,5 puntos] Discutir y resolver en función de los valores del parámetro m el sistema lineal

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ mx+m^2y+m^2z=1 \\ mx+my+m^2z=1 \end{cases}$$

b) [1 punto] Teniendo en cuenta que $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$, determinar el valor del determinante $\begin{vmatrix} 0 & a & a^2 \\ a^{-1} & 0 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & 0 \end{vmatrix}$.

SOLUCIÓN.

a) • Para $m \neq 0$ y $m \neq 1$: compatible determinado. Soluciones: $x = \frac{m+1}{m}$; $y=0$; $z = -\frac{1}{m}$

• Para $m=0$: incompatible

• Para $m=1$: compatible indeterminado. Soluciones: $x=1-\lambda-\mu$; $y=\lambda$; $z=\mu$

b) 2

Opción B. a) [1,25 puntos] Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcular la inversa de la matriz A^n .

b) [1,25 puntos] Estudiar para qué valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$, existe un único polinomio $P(x) = a+bx+cx^2$ que satisfice $P(0)=\alpha$, $P(1)=0$, $P(-1)=0$.

SOLUCIÓN.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\forall \alpha \neq 0$

Septiembre 09.

Opción A. a) [1,5 puntos] Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de orden 2. Hallar la relación entre los parámetros a, b y c para que se verifique que $A^{-1} = 2I - A$.

b) [1 punto] Calcular, en función de los valores del parámetro k , el rango de la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & k \end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN.

a) $ab = -1$, $c = 0$

b) Si $k \neq 11$: $\text{rg}B = 3$. Si $k = 11$: $\text{rg}B = 2$

Opción B. a) [1,25 puntos] Resolver el siguiente determinante sin utilizar la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ -a+c & -b-a & -c+b \\ a+c & b-a & c+b \end{vmatrix}$$

b) [1,25 puntos] Para $M = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$, calcular M^n con $n \in \mathbb{N}$.

SOLUCIÓN.

a) 0

b) $M^n = \begin{cases} I & \text{si } n \text{ es par} \\ M & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

Junio 10.

a) (1,5 puntos) Estudiar para qué valores de a el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a-1 & 0 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}$ es no nulo. Para $a = 3$, obtener el determinante de la matriz $2A$.

b) (1 punto) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Calcular el rango de $(AB)^T$.

SOLUCIÓN.

a) Para $a \neq 0$ y $a \neq 1$

b) $\text{rg}(AB)^T = 2$

Junio 10.

a) (1,5 puntos) Estudiar para qué valores de x , la matriz inversa de $\begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix}$ coincide con su opuesta.

b) (1 punto) Dos hermanos de tercero y cuarto de primaria iban camino del colegio con sus mochilas cargadas de libros todos del mismo peso. Uno de ellos se lamentaba del peso que transportaba y el otro le dijo: "¿De qué te quejas? Si yo te cogiera un libro, mi carga sería el doble que la tuya. En cambio si te diera un libro, tu carga igualaría a la mía". ¿Cuántos libros llevaba cada hermano?

SOLUCIÓN.

a) $x = \pm 3$

b) 7 y 5 libros.

Septiembre 10.

a) (1,75 puntos) Discutir y resolver cuando sea posible el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} ax + y = 0 \\ -2x + y + az = 1 \\ y + az = 1 \end{cases}$$

b) (0,75 puntos) ¿Existe algún valor del parámetro a para el cual el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sea solución del sistema anterior?

SOLUCIÓN.

- a) - Si $a \neq 0$: Sistema compatible determinado. Soluciones: $x=0$; $y=0$; $z=\frac{1}{a}$
 - Si $a = 0$: Sistema incompatible
 b) No.

Septiembre 10.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha & 0 \\ -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$

- a) (1 punto) Estudiar si existen valores de α y β para los cuales la matriz A sea simétrica. ¿Será la matriz $B = A A^T$ igual a la matriz identidad en algún caso?
 b) (0,75 puntos) Razonar cuál es la relación entre el determinante de A y el de B .

c) (0,75 puntos) Discutir y resolver cuando sea posible el sistema $B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN.

- a) $\alpha = k\pi$, $\forall \beta$. Cuando $\beta = \pm 1$ b) $|B| = |A|^2$
 c) - Si $\beta \neq 0$: Sistema compatible determinado. Soluciones: $x=1$; $y=1$; $z=\frac{1}{\beta^2}$
 - Si $\beta = 0$: Sistema incompatible

Junio 11.

a) (1,25 puntos) Estudiar para qué valores de α el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \alpha+1 & -1 & \alpha-2 \\ -1 & \alpha+1 & 2 \end{pmatrix}$

tiene rango máximo.

b) (1,25 puntos) Siendo A^{-1} la inversa de la matriz A , calcular $(A^{-1})^2$ para $\alpha = -1$.

SOLUCIÓN.

- a) $\forall \alpha \neq -\frac{1}{2}, 0$ b) $(A^{-1})^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Junio 11.

a) (1 punto) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \\ -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \operatorname{sen} \alpha \\ 0 & \beta & 0 \\ -\operatorname{sen} \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}$. Estudiar qué valores de α y

β hacen que sea cierta la igualdad: $(\det(A))^2 - 2\det(A)\det(B) + 1 = 0$

b) (1,5 puntos) Utilizar las propiedades de los determinantes para calcular el valor de $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & a+3 & b+4 \\ 2 & c+3 & d+4 \end{vmatrix}$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

SOLUCIÓN.

a) $\forall \alpha; \beta = 1$ b) $2(ad - bc)$

Septiembre 11.

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$.

a) (0,75 puntos) Calcular el determinante de la matriz (AA^T) con A^T la traspuesta de A .

b) (0,75 puntos) Estudiar para qué valores del parámetro α se satisface la ecuación

$$4|A|^2 - 2|A^T| + 2\alpha^2 = 0 \quad \text{con } |A| = \det(A)$$

c) (1 punto) Obtener la inversa de A cuando sea posible.

SOLUCIÓN.

a) α^4 b) $\alpha = 0$ c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\alpha & 1/\alpha^2 \\ 0 & -1/\alpha \end{pmatrix}$ para $\alpha \neq 0$

Septiembre 11.

(2,5 puntos) Utilizar las propiedades de los determinantes para obtener los valores de a y b que satisfacen simultáneamente las ecuaciones

$$\begin{vmatrix} a+b & 1 & 2 \\ a-b & 0 & 1 \\ a+2b & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} a & a \\ a^2 & ba^2 \end{vmatrix} = 0$$

SOLUCIÓN.

$a=0, b=0$; $a=\frac{5}{2}, b=1$

Junio 12.

Sean a un número real y el sistema lineal $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$

a) (1,5 puntos) Calcule el determinante de la matriz de los coeficientes y determine para qué valores de a el sistema anterior es incompatible, compatible determinado y compatible indeterminado.

b) (1 punto) Resuelva el sistema anterior en el caso $a=0$

SOLUCIÓN.

- a) $|A| = a^3 - 3a + 2$.
- Para $a \neq 1$ y $a \neq -2$: compatible determinado
 - Para $a = 1$: compatible indeterminado
 - Para $a = -2$: incompatible

b) $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{2}$

Junio 12.

- a) (1,5 puntos) Comprueba que la matriz M es inversible y calcule su inversa, donde $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

- b) (1 punto) Encuentre las matrices A y B que cumplen las siguientes ecuaciones

$$8A - 5B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad 2A - B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN.

- a) M es inversible porque $|M| \neq 0$ $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2/5 & -1/5 \\ -1 & 3/5 & 1/5 \\ 1 & -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -11 & 0 \\ 6 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 0 \\ 10 & -5 & 9 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Septiembre 12.

- a) (0,5 puntos) El determinante de la matriz A que aparece a continuación es 2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Sin utilizar la regla de Sarrus, determine cuánto vale el determinante de la matriz B siguiente (enuncie las propiedades que utilice):

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- b) (2 puntos) Sea C la siguiente matriz: $C = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & -\operatorname{cos} x & 0 \\ \operatorname{cos} x & \operatorname{sen} x & 0 \\ 1 & \operatorname{sen} x & x \end{pmatrix}$

Determine los valores de x para los que la matriz C tiene inversa y calcularla cuando sea posible.

SOLUCIÓN.

a) $|B| = 2$ b) $\exists C^{-1} \forall x \neq 0$ $C^{-1} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \operatorname{cos} x & 0 \\ -\operatorname{cos} x & \operatorname{sen} x & 0 \\ \frac{\operatorname{sen} x (\operatorname{cos} x - 1)}{x} & \frac{-\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{cos} x}{x} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$

Septiembre 12.

a) (1,5 puntos) Determine para qué valores de m el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} mx + 2y + 6z &= 0 \\ 2x + my + 4z &= 2 \\ 2x + my + 6z &= m - 1 \end{aligned}$$

es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

b) (1 punto) Se sabe que una matriz simétrica B de dimensión 3×3 tiene como determinante -3 . Determine el determinante de la matriz $B+B^t$ donde B^t denota la traspuesta de B .

SOLUCIÓN.

a) · Para $m \neq \pm 2$: compatible determinado

· Para $m = -2$: incompatible

· Para $m = 2$: incompatible

b) $|B+B^t| = -24$

Junio 13.

Sea A la matriz: $A = \begin{pmatrix} 5 & -m & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$

a) (1,5 puntos) Discuta el sistema que aparece a continuación, para cada uno de los valores de m y resuélvalo para los valores de m siguientes: $m = -1$ y $m = 2$.

$$AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{donde } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

b) (1 punto) Determine la inversa de la matriz A cuando $m = 0$.

SOLUCIÓN.

a) · Si $m \neq 2$ y $m \neq 3$: sistema compatible determinado. · Si $m = 2$ o $m = 3$: sistema compatible indeterminado.

· Para $m = -1$: $x = y = z = 0$ · Para $m = 2$: $x = y = -\lambda$, $z = \lambda$

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1/3 & -5/6 & -5/6 \end{pmatrix}$

Junio 13.

a) (1 punto) Determine el rango de la matriz A , que aparece a continuación, según los diferentes valores de a :

$$A = \begin{pmatrix} a & -a & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ a+2 & -5 & -10 \end{pmatrix}$$

b) (1,5 puntos) Determine, si existe, una matriz A , 2×2 , que verifique la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es el rango de la matriz A ?

SOLUCIÓN.

a) · Para $a \neq 3$: $\text{rg } A = 3$ · Para $a = 3$: $\text{rg } A = 2$

b) $A = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$; $\text{rg } A = 1$

Septiembre 13.

Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\lambda x + 4y + 12z = 0$$

$$2x + y + 4z = \lambda$$

$$\lambda x + y + 6z = 0$$

a) (1 punto) Determine los valores de λ para los que el sistema de ecuaciones tiene solución única.

b) (1,5 puntos) Resuelva el sistema, si es posible, cuando $\lambda = 4$ y cuando $\lambda = 0$.

SOLUCIÓN.

a) $\lambda \neq 4$ b) · Para $\lambda = 4$: no tiene solución. · Para $\lambda = 0$: $x = y = z = 0$

Septiembre 13.

Sean A y B las dos matrices siguientes: $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & a \end{pmatrix}$

a) (1 punto) ¿Para qué valores de a existe la inversa de AB? ¿Y la de BA?

b) (1,5 puntos) Encuentre la inversa de la matriz:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Compruebe que cuando la matriz encontrada se multiplica por la izquierda por C, se obtiene la identidad.

SOLUCIÓN.

a) · $a \neq -\frac{3}{2}$ y 1 · No existe inversa de BA.

b) $C^{-1} = \begin{pmatrix} 7/2 & -3/2 & -3/2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Junio 14.

(2,5 puntos) Sea m un número real y considere la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Determine todos los valores de m para los que la matriz A tiene inversa.

b) (1 punto) Determine, si existe, la inversa de A cuando $m = 0$.

c) (0,5 puntos) Determine, si existe, la inversa de A^2 cuando $m = 0$.

SOLUCIÓN.

a) Existe inversa $\forall m$. b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $(A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Junio 14.

(2,5 puntos) Considere las matrices de orden 2×2 siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

a) (1,5 puntos) Determine dos matrices M y N de orden 2×2 tales que:
$$\begin{cases} AM + BN = D \\ AM = N \end{cases}$$

b) (1 punto) Se considera una matriz G de orden 3×3 , cuyas columnas se representan por C_1, C_2, C_3 y cuyo determinante vale 2. Considere ahora la matriz H cuyas columnas son $C_3, C_3 + C_2, 3C_1$, ¿cuál es el determinante de esta nueva matriz H?

SOLUCIÓN.

a) $M = \begin{pmatrix} 2/9 & 2/3 \\ -4/9 & -1/3 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ b) $|H| = -6$

Septiembre 14.

(2,5 puntos)

a) (1,5 puntos) Sean A y B matrices 2×2 . Determine dichas matrices sabiendo que verifican las siguientes ecuaciones:

$$A + 3B = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$2A - B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) (1 punto) Sean C y D las matrices: $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Determine el determinante: $|5(CD)^{-1}|$, donde $(CD)^{-1}$ es la matriz inversa de (CD) .

SOLUCIÓN.

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ b) $|5(CD)^{-1}| = -\frac{25}{2}$

Septiembre 14.

(2,5 puntos) Determine para qué valores de a el sistema que aparece a continuación es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible

$$\begin{aligned} ax - 3y + 6z &= 3 \\ ax + 3y + az &= 6 \\ -ax - 6y + 9z &= 0 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN.

- Si $a \neq -4$ y $a \neq 0$: compatible determinado.
- Si $a = -4$: incompatible.
- Si $a = 0$: incompatible.

Junio 15.

(3 puntos) Sea λ un parámetro real cualquiera. Considere la matriz:

$$\begin{pmatrix} \lambda+1 & -1 & \lambda+1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 1 & -2 & \lambda \end{pmatrix}$$

- a) (2 puntos) Determine el rango de esa matriz según los valores de λ
- b) (1 punto) Determine para qué valores de λ existe la inversa de esa matriz y determine la inversa, si existe, para $\lambda = -2$.

SOLUCIÓN.

- a) • Si $\lambda \neq -1, 0, 1$: $\text{rg}A = 3$ • Si $\lambda = -1$: $\text{rg}A = 2$ • Si $\lambda = 0$: $\text{rg}A = 2$ • Si $\lambda = 1$: $\text{rg}A = 2$

b) $\exists A^{-1} \forall \lambda \neq -1, 0, 1$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ -1/3 & 1/2 & -1/3 \end{pmatrix}$

Junio 15.

(3 puntos)

- a) (1,5 puntos) Considere la matriz y los vectores siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{donde } x, y \text{ y } z \text{ son números reales.}$$

Determine x, y y z para que el vector $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sea solución del sistema $MA = B$.

- b) (1,5 puntos) Sean ahora la matriz y vectores siguientes:

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde a, b y c son números reales que verifican que $a \neq 0$, $a+b=0$, $c=a$.

Determine si el sistema $NX = B$ es compatible determinado.

SOLUCIÓN.

- a) $x = -\frac{2}{9}$, $y = \frac{4}{9}$, $z = \frac{1}{9}$ b) Es compatible determinado.

Septiembre 15.

(3 puntos)

a) (2 puntos) Sea λ un parámetro real cualquiera. Determine para qué valores de λ el sistema de ecuaciones que aparece a continuación es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$\begin{cases} 2\lambda x - 2y - \lambda z = 2 \\ \lambda x - y + z = 5 \\ 3\lambda x + 4y + (\lambda - 1)z = \lambda - 5 \end{cases}$$

b) (1 punto) Determine la inversa de la matriz: $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

SOLUCIÓN.

a) ▪ Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq -2$: compatible determinado. ▪ Si $\lambda = 0$: incompatible. ▪ Si $\lambda = -2$: incompatible.

b) $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$

Septiembre 15.

(3 puntos)

a) (2 puntos) Sea λ un parámetro real cualquiera y considere la matriz y vector siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & -\lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1) (1 punto) ¿Para qué valores de λ existe la matriz inversa $(A - 2I)^{-1}$, siendo I la matriz identidad de orden 3?

2) (1 punto) Si $\lambda = 0$, encuentre los valores de x , y , y z que satisfacen la ecuación $AX = 2X + b$ donde

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) (1 punto) Sean F_1 , F_2 y F_3 la primera, segunda y tercera filas, respectivamente, de una matriz M de orden 3×3 cuyo determinante es -2 .

Calcule el determinante de una matriz cuyas filas primera, segunda y tercera son, respectivamente: $5F_1 - F_3$, $3F_3$ y F_2 .

SOLUCIÓN.

a) 1) $\exists (A - 2I)^{-1} \forall \lambda \neq -2, -1, 1$ 2) $x = 1$, $y = -\frac{10}{3}$, $z = 1$

b) 30

Junio 16.

(3 puntos)

a) (2 puntos) Sea λ un parámetro real cualquiera, determine para qué valores de λ el sistema que aparece a continuación es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$\begin{aligned} -x + \lambda y + \lambda z &= 4 \\ \lambda x + \lambda y + z &= 6 \\ -\lambda x + \lambda y + \lambda z &= 3 + \lambda \end{aligned}$$

b) (1 punto) Resuélvalo, si es posible, para $\lambda = 2$.

SOLUCIÓN.

a) ■ Compatible determinado para $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$. ■ Compatible indeterminado para $\lambda = 1$. ■ Incompatible para $\lambda = 0$.

b) $x = -1$, $y = \frac{13}{2}$, $z = -5$

Junio 16.

(3 puntos)

a) (2 puntos) Sea "a" un parámetro real cualquiera. Determine el rango de la matriz siguiente según los diferentes valores del parámetro "a".

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & -1 & a+1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$$

b) (1 punto) Se considera una matriz de orden 3×3 cuyas columnas son C_1 , C_2 y C_3 y cuyo determinante es 2.

Se define ahora la matriz B cuyas columnas son $-C_2$, $C_3 + C_2$ y $3C_1$. Determine el determinante de la inversa de B, si existe.

SOLUCIÓN.

a) ■ Para $a \neq -1$ y $\lambda \neq 1$: $\text{rg}A = 3$ ■ Para cualquier otro valor de a: $\text{rg}A = 2$.

b) $|B^{-1}| = -\frac{1}{6}$

Septiembre 16.

(3 puntos)

a) (2 puntos) Determine para qué valores de k el sistema que aparece a continuación es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$\begin{aligned} x + y + kz &= 6 \\ x + ky + z &= 0 \\ kx - y + z &= -6 \end{aligned}$$

b) (1 punto) Resuélvalo, si es posible, cuando $k = -1$

SOLUCIÓN.

a) ■ Compatible determinado para $k \neq -1, 0, 1$ ■ Compatible indeterminado para $k = 0$ y para $k = -1$
■ Incompatible para $k = 1$

b) $x = 3$, $y = 3 + \lambda$, $z = \lambda$

Septiembre 16.

(3 puntos)

a) (1,5 puntos) Determine la matriz inversa, si existe, de la matriz siguiente:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) (1,5 puntos) Determine la matriz $A^2 + B^2$ siendo A y B las matrices solución del siguiente sistema:

$$2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN.

a) $M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -3/2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 14/9 & 0 \\ 2/3 & 1 \end{pmatrix}$