La Teoría de Números

Al pensar que todo podía explicarse con los números, los Pitagóricos establecieron gran cantidad de clasificaciones entre los éstos y se dedicaron a descubrir sus propiedades. Así iniciaron una rama de las Matemáticas que hoy se conoce como la Teoría de Números, que en el siglo XVII tendría un nuevo impulso con Fermat y ya en el siglo XX ha encontrado aplicaciones insospechadas.

<u>Sumas de impares y de pares</u>.-

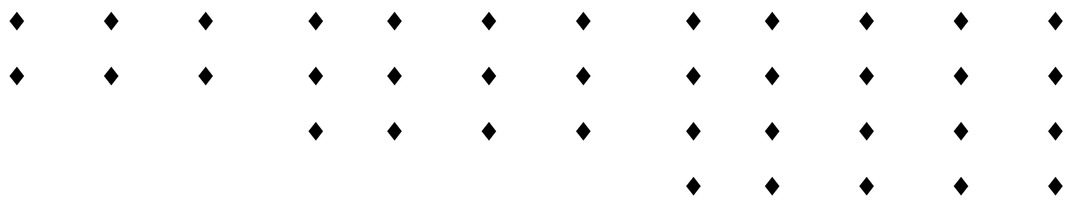
- Los Pitagóricos construían sus teoremas juntando piedrecillas para cada número. Así observaron, por ejemplo, que al sumar términos de la sucesión de los números impares:

$1 + 3 = 2^2$ $\quad$ $1 + 3 + 5 = 3^2$ $\quad$ $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$ $\quad$ ... etc.

y, en general, que: **$1 + 3 + 5 + ... + (2n + 1)$ es un cuadrado perfecto**

- Descubrieron también que al sumar términos de la sucesión de los números pares:

$2 + 4 = 6 = 2 \cdot 3$ $\quad$ $2 + 4 + 6 = 12 = 3 \cdot 4$ $\quad$ $2 + 4 + 6 + 8 = 20 = 4 \cdot 5$ $\quad$ ... etc.



Se obtienen unos números (6, 12, 20...) que se pueden descomponer como producto de dos factores consecutivos. Por lo tanto, se pueden representar como rectángulos de piedrecillas. Les llamaron "**números oblongos o rectangulares**".

<u>Suma de los divisores</u>.-

Un número es perfecto si es igual a la suma de sus divisores distintos de él. Si supera dicha suma, se llama **abundante**. Si no llega a dicha suma, se llama **defectuoso** Por ejemplo:

$6 = 1 + 2 + 3 \Rightarrow$ 6 es perfecto $\qquad$ $4 > 1 + 2 \Rightarrow$ 4 es abundante

$12 < 1 + 2 + 3 + 4 + 6 \Rightarrow$ 12 es defectuoso

<u>Ejercicio 1</u>: ¿Hay algún otro número perfecto menor que 100?.

También son números perfectos: 496 , 8.128 , 33.550.336 ...

<u>Amigos</u>.-

Se cuenta que en una ocasión le preguntaron a Pitágoras: "¿Para ti qué es un amigo?". Y respondió: "Otro yo". La aplicación de esta forma de concebir la amistad a la Teoría de los Números, condujo a decir que: **dos números son amigos cuando cada uno de ellos es igual a la suma de los divisores del otro**. Por ejemplo:

Divisores de 284: 1 , 2 , 4 , 71 , 142.

Divisores de 220: 1 , 2 , 4 , 5 , 10 , 11 , 20 , 22 , 44 , 55 , 110

$284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110$

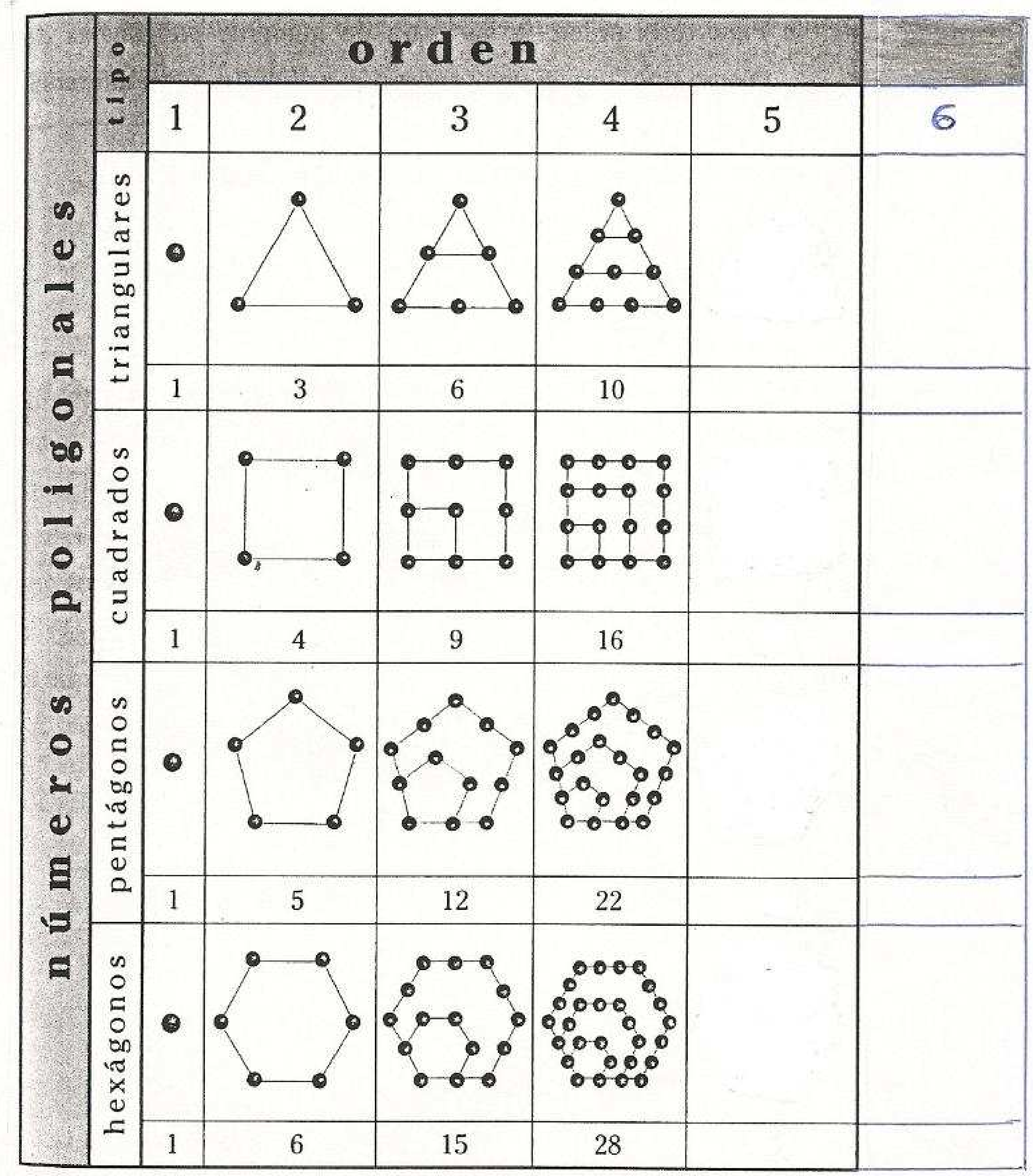
$220 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142$ $\qquad$ Así, que 220 y 284 son números amigos.

<u>Ejercicio 1 bis</u>: Un número perfecto, ¿tiene algún número amigo?.

<u>Números poligonales</u>.-

Para construir con piedras triángulos equiláteros cada vez mayores, se necesitan:
1 , 3 , 6 , 10 , 15 ... etc. Por ello, los Pitagóricos llamaron a éstos los **números triangulares**.

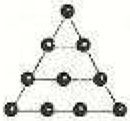
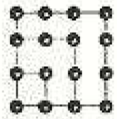
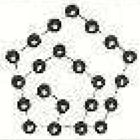
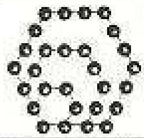
De forma análoga, definieron los **números cuadrados**, **números pentágonos**, **números hexágonos**, etc. En la siguiente tabla tienes los 4 primeros números de cada tipo:



números poligonales		orden					
	tipo	1	2	3	4	5	6
	triangulares	1	3	6	10		
	cuadrados	1	4	9	16		
	pentágonos	1	5	12	22		
	hexágonos	1	6	15	28		

<u>Ejercicio 2</u>: Completa las columnas 5 y 6 de la tabla anterior.

<u>Ejercicio 3</u>: Cada clase de números poligonales forma una sucesión en la que se puede encontrar una expresión para su término general. En el siguiente cuadro hay dos; completa las otras dos que faltan:

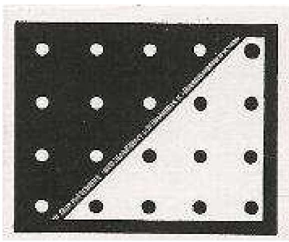
Triangulares		*Cuadrados*	
	1, 3, 6, 10	n^2	1, 4, 9, 16
Pentagonales		*Hexagonales*	
$\frac{n(3n-1)}{2}$	1, 5, 12, 22		1, 6, 15, 28

Después, calcula cuál es el 10º número triangular, el 12º número cuadrado, el 11º número pentágono y el 9º número hexágono... sin construir las figuras, por supuesto.

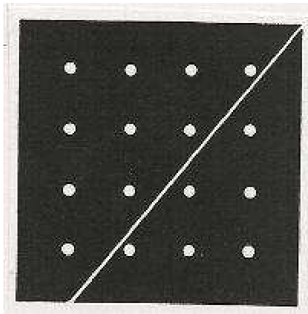
<u>Algunos teoremas</u>.-

Los Pitagóricos demostraban sus teoremas con las mismas piedras que usaban para representar los números, así que eran demostraciones "que se veían".
Por ejemplo:

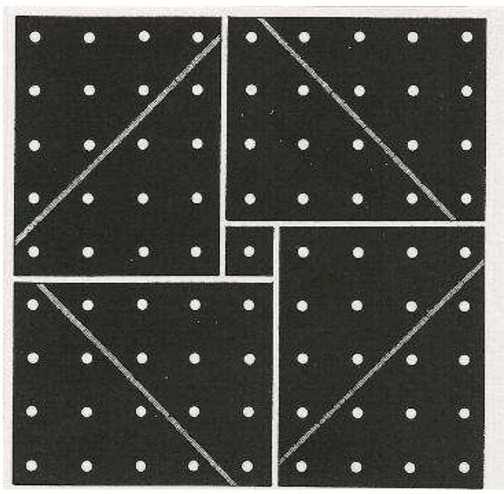
a) **El doble de un número triangular es un número oblongo.**



b) **Todo número cuadrado es igual a la suma de dos números triangulares consecutivos.**



c) **Ocho veces un número triangular, más una unidad, es igual a un número cuadrado.**



Ejercicio 4.- Ahora, de una forma similar, intenta demostrar gráficamente que cualquier número triangular de un orden n es igual a la suma del número triangular del orden anterior (n – 1) más n.

Números primos.-

Los números que sólo tienen como divisores a la unidad y a si mismos no permitían a los Pitagóricos construir con piedras ni cuadrados ni rectángulos; sólo ponerlas en línea. Es decir, no son números cuadrados ni oblongos y les llamaron **números lineales o primos**:

1	2	3	5	7	... etc.
♦	♦ ♦	♦ ♦ ♦	♦ ♦ ♦ ♦ ♦	♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦	

Euclides demostró que **existen infinitos números primos**.

La demostración es sencilla pero de gran elegancia: se hace por el llamado **método de reducción al absurdo**. Este método consiste en suponer lo contrario de lo que se quiere demostrar y ver cómo a partir de ello se deduce algo imposible o contradictorio; entonces, la suposición inicial es falsa y lo que queremos demostrar ha de ser cierto.

Veamos la demostración de Euclides:

> *Supongamos que los números primos son finitos. Entonces habrá uno que sea el más grande de ellos; lo llamamos* P.
>
> *Construimos ahora el número* N *que es el producto de todos los números primos más* 1:
>
> $$N = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times ... \times P + 1$$
>
> N *no es divisible por ninguno de los primos conocidos, pues el resto de su división entre cada uno de ellos es siempre* 1. *Entonces* N *es primo y desde luego es mayor que* P. *Pero esto es imposible, porque* P *es el mayor primo.*
>
> *Conclusión: es falso que los números primos sean finitos, los números primos son infinitos.*

Ejercicio 5.- ¿Es primo el número 131.071?.

Ejercicio 6.- Fíjate en los primos a partir del 5. ¿Qué cifras diferentes ves que aparecen en el lugar de las unidades?. ¿Acabará algún primo en otra cifra que no sea alguna de esas?.

No se ha encontrado una fórmula con la que podamos obtener todos los primos. Sí hay fórmulas parciales, con las que se obtienen bastantes. Por ejemplo:

$$n^2 + n + 41 \qquad\qquad n^2 + n + 17$$

Si en ambas fórmulas se da valores a n, se obtienen muchos resultados que son números primos, pero algunos no lo son. Y a su vez, hay números primos que no se pueden conseguir así.

Números de Mersenne.-

El matemático francés Mersenne propuso esta fórmula para conseguir números primos:

$\mathbf{2^n - 1}$, siendo n un número primo.

Es también una fórmula parcial. Por ejemplo: $2^5 - 1 = 31$ es primo,
$2^{11} - 1 = 2.047 = 23 \cdot 89$ no es primo.

Pero los números de Mersenne han sido el mejor método para buscar números primos cada vez más grandes. El mayor conocido es en la actualidad: $2^{13.466..917} - 1$

<u>Primos gemelos</u>.-

En la lista de los números primos se observa la presencia de algunas parejas **que tienen entre sí una diferencia de 2 unidades**. Por ejemplo: 3 y 5 ; 5 y 7 ; 11 y 13 ; etc. Estos pares se llaman primos gemelos.

Se piensa que **existen infinitas parejas de números primos gemelos**, pero aún no se ha podido demostrar. En esas condiciones, se dice que esa propiedad **es una conjetura**.

<u>Ejercicio 7</u>.- Completa la lista de todas las parejas de primos gemelos menores que 100. Halla también su suma y su producto, rellenando una tabla de este tipo:

Primos gemelos	Sumas	Productos
3 y 5		
5 y 7		
11 y 13		

- ¿Observas algo en la columna de las sumas? ¿Puedes demostrar alguna propiedad sobre sumas de primos gemelos?
- ¿Observas algo en la columna de los productos? ¿Puedes demostrar alguna propiedad sobre productos de primos gemelos?

<u>Ejercicio 8</u>.- Ésta es la Regla de Fermat para obtener números amigos:

$$n = 2^p \cdot q \cdot r \qquad m = 2^p \cdot s$$

donde q, r, s son primos de la forma: $q = 3 \cdot 2^{p-1} - 1$, $r = 3 \cdot 2^p - 1$, $s = 9 \cdot 2^{p-1} - 1$
Utiliza esa regla para encontrar tres parejas de números amigos.

<u>Ejercicio 9</u>.- Hemos visto en las sucesiones de los números poligonales fórmulas que expresaban en cada caso el término general. Esto también puede hacerse de forma recurrente, es decir, expresando cada término a partir del anterior. Por ejemplo, en los números triangulares T_n : $T_n = T_{n-1} + n$. Encuentra fórmulas recurrentes para los números cuadrangulares, pentagonales y hexagonales.

<u>Ejercicio 10</u>.- Las puertas del hotel.

En un hotel hay 1000 habitaciones individuales, numeradas de 1 a 1000. Al regresar de una fiesta algo alegres, los 1000 clientes que las ocupan se dedican a hacer lo siguiente:

El primer cliente abre todas las puertas. El segundo cliente cierra las puertas pares, comenzando por la 2. El tercer cliente, cada tres puertas cambia la situación de la tercera; la abre si está cerrada o la cierra si está abierta. El cuarto cliente cambia la situación de cada cuarta puerta; el quinto cambia cada quinta; etc.

¿Qué puertas quedarán cerradas cuando los 1000 clientes hayan terminado? ¿Cuáles quedarán abiertas? Investiga por qué motivo son ésas y no otras. Relaciona esta historia con alguna propiedad de los números que hemos estudiado.

Ejercicio 11.- Escribe un número del 1 al 15. Escribe el siguiente número. Añádeselo al primero. Escribe el resultado. Ahora has escrito tres números. Ana dice: "*Uno y sólo uno de esos tres números está en esta lista*:

3 6 9 12 15 18 21 24 27 30"

¿Tiene razón Ana?. ¿Siempre tendrá razón? Explica por qué.

Ejercicio 12.- La **Conjetura de Goldbach** dice: "*Todo número par mayor que 2 se puede expresar como suma de dos números primos*". Aún no se ha podido demostrar y no te pedimos que tú lo hagas (pero si lo consigues, alcanzarás fama mundial...). Simplemente, comprueba que esta conjetura se cumple para todos los pares desde 4 hasta 50.

Teorema de Fermat.-

La más famosa propiedad de Teoría de Números es el llamado Teorema de Fermat, que tras 350 años de intentos a cargo de los mejores matemáticos, fue resuelto en 1995 por Andrew Wiles. Lo más correcto sería decir que la Conjetura de Fermat en 1995 pasó a ser el Teorema de Wiles. Es tal su importancia que merece ser tratado en capítulo aparte.

Nota: los gráficos han sido tomados del libro *Viaje gráfico por el mundo de las Matemáticas* (ICE de Zaragoza, 1986), con texto de Vicente Melvilla Seguí y dibujos de José A. Canteras.