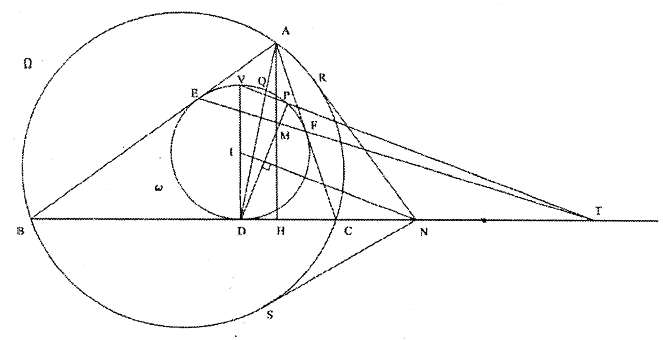
OLIMPIADA MATEMÁTICA

PROBLEMAS 2012

REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA



Pero $UW^2 = UH^2 + WH^2$, $IW^2 = (WH - ID)^2 + HD^2$, con lo que la anterior condición es equivalente a

$$UD^2 - 2WH \cdot ID = UH^2 - HD^2 = UD(UD - 2HD), \qquad WH = \frac{HD \cdot UD}{ID},$$

y el problema se reduce a demostrar que esta última expresión es la mitad de la altura. Llamando s al semiperímetro de ABC, tenemos que $BD = s - b, CD = s - c$, $BH = c\cos B$, y al estar U definido como el punto sobre BC tal que su potencia es la misma respecto de ω y Ω, y llamando Σ al área de ABC y usando la fórmula de Herón para la misma, tenemos

$$UD^2 = (UD - BD)(UD + CD), \qquad UD = \frac{BD \cdot CD}{CD - BD} = \frac{(s-b)(s-c)}{b-c} = \frac{\Sigma^2}{s(b-c)(s-a)}.$$

Luego

$$WH = \frac{h}{2}\frac{a(s-b-c\cos B)}{(b-c)(s-a)} = \frac{h}{2}\frac{\left(a(a+b+c)-2ab-a^2-c^2+b^2\right)}{(b-c)(b+c-a)} =$$
$$= \frac{h}{2}\frac{\left(ac-ab-c^2+b^2\right)}{(b-c)(b+c-a)} = \frac{h}{2},$$

como queríamos demostrar.

$a_2(a_{n-1}+a_{n+1}) = a_n(a_1+a_3)$ y teniendo en cuenta que $a_1 = 1, a_2 = 5$ y $a_3 = 20$, resulta $a_{n+1} = 6a_n - a_{n-1}$. De este modo es inmediato que todos los términos de la sucesión son enteros.

Para encontrar, una formula explícita de a_n ensayamos con $a_n = t^n$ con lo que obtenemos a partir de la última expresión que

$$t^{n+1} - 6t^n - t^{n-1} = 0 \Leftrightarrow t^{n-1}(t^2 - 6t + 1) = 0.$$

Se tienen tres soluciones. La primera $t = 0$, que no cumple con el enunciado. Las otras dos $t = 3 \pm 2\sqrt{2}$ combinadas linealmente, sí lo harán. Es decir la solución que buscamos es de la forma $a_n = \lambda\left(3-2\sqrt{2}\right)^n + \mu\left(3+2\sqrt{2}\right)^n$, $\lambda, \mu \in R$.

Para determinar las constantes λ y μ utilizamos que $a_1 = 1$ y $a_2 = 5$ y tenemos

$$\begin{cases} \lambda(3-2\sqrt{2}) + \mu(3+2\sqrt{2}) = 1 \\ \lambda(3-2\sqrt{2})^2 + \mu(3+2\sqrt{2})^2 = 5 \end{cases}.$$

Resolviendo este sistema $\lambda = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$ y $\mu = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$, con lo que

$$a_n = \frac{2+\sqrt{2}}{4}\left(3-2\sqrt{2}\right)^n + \frac{2-\sqrt{2}}{4}\left(3+2\sqrt{2}\right)^n.$$

6. Sea ABC un triángulo acutángulo, ω su circunferencia inscrita de centro I, Ω su circunferencia circunscrita de centro O, y M el punto medio de la altura AH, donde H pertenece al lado BC. La circunferencia ω es tangente a este lado BC en el punto D. La recta MD corta a ω en un segundo punto P, y la perpendicular desde I a MD corta a BC en N. Las rectas NR y NS son tangentes a la circunferencia Ω en R y S respectivamente. Probar que los puntos R, P, D y S están en una misma circunferencia.

SOLUCIÓN. Supongamos que $b = c$. Entonces, el pie de la altura H coincide con el punto de tangencia D, luego DM es perpendicular a BC y N no está definido. Asumiremos entonces sin pérdida de generalidad que $b > c$. Sea U el punto de la recta BC cuya potencia es la misma respecto de ω y Ω. Claramente, hay exactamente dos tangentes a cada una de ambas circunferencias que pasan por U, siendo D el punto de tangencia de una de ellas con ω; llamemos E al punto de tangencia con ω de la segunda recta que pasa por U. La distancia de U a los cuatro puntos de tangencia es la misma, luego existe una circunferencia de centro U que pasa por los cuatro puntos, es decir, si demostramos que $U = N$, el problema quedaría resuelto. Ahora bien, el eje radical de la circunferencia descrita con centro U y ω, es claramente la recta DE y la perpendicular a esta recta por I es la mediatriz de la cuerda DE, luego pasa por U. Basta entonces con demostrar que el punto W de la altura AH cuya potencia es la misma respecto a la circunferencia de centro U por D y por E, y respecto a ω, es el punto medio de AH, con lo que sería $P = E$ y $N = U$. Ahora bien, dicha potencia es

$$UD^2 - UW^2 = ID^2 - IW^2$$

1. Determinar razonadamente si el número $\lambda_n = \sqrt{3n^2 + 2n + 2}$ es irracional para todo entero no negativo n.

SOLUCIÓN. Supongamos que n es par. Entonces, $3n^2 + 2n$ es múltiplo de 4 y $3n^2 + 2n + 2$ es múltiplo de 2 pero no de 4, con lo que no puede ser un cuadrado perfecto.

Supongamos que n es impar. Cualquier cuadrado perfecto impar da resto 1 al dividir entre 8; este resultado se demuestra trivialmente, escribiendo el cuadrado de cualquier entero impar $2m+1$ en la forma $4m(m+1)+1$ y observando que, bien m, bien $m+1$, ha de ser par. Se tiene entonces que si n es impar y $3n^2 + 2n + 2$ fuera un cuadrado perfecto, entonces $3n^2 + 2n + 2$ daría resto 1 al dividir entre 8, o equivalentemente, $2n$ daría resto $1 - 2 - 3 = -4$ al dividir entre 8, con lo que $2n$ sería múltiplo de 4 y n par, contradicción. Luego para cualquier entero, positivo o negativo, $3n^2 + 2n + 2$ es un entero que no es un cuadrado perfecto, por tanto λ_n es siempre irracional para cualquier entero n, positivo o negativo.

Nótese también que λ_n es siempre real, incluso cuando n es un entero negativo, pues $3n^2 + 2n + 2 > (n+1)^2 \geq 0$.

2. Hallar todas las funciones $f : R \to R$ de variable real con valores reales, tales que

$$(x-2)f(y) + f(y + 2f(x)) = f(x + yf(x)) \qquad (1)$$

para todo $x, y \in R$.

SOLUCIÓN. Supongamos primeramente que $f(0) = 0$. Haciendo $x = 0$ en (1), $f(y) = 0$ para todo $y \in R$. Esta función satisface la ecuación funcional dada (1).

Sea $f(0) \neq 0$. Haciendo $y = 0$ en (1), se obtiene $(x-2)f(0) + f(2f(x)) = f(x)$ para todo $x \in R$. Claramente esto implica que f es inyectiva porque si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $(x_1 - 2)f(0) + f(2f(x_1)) = f(x_1) = (x_2 - 2)f(0) + f(2f(x_2)) = f(x_2)$ y por tanto $(x_1 - x_2)f(0) = 0$ y $x_1 = x_2$.

Poniendo ahora $x = 2$ en (1), $f(y + 2f(2)) = f(2 + yf(2))$ para todo $y \in R$. Al ser f inyectiva $y + 2f(2) = 2 + yf(2)$ para todo $y \in R$. En esta igualdad si $y = 0$, $f(2) = 1$. Al ser inyectiva $f(3) \neq 1$; por tanto con $x = 3$ e $y = \dfrac{3}{1 - f(3)}$ se llega a

$f\left(\frac{3}{1-f(3)}+2f(3)\right)=0$. Hemos de demostrar que f tiene un cero. Sea a, tal que $f(a)=0$. Poniendo ahora $y=a$ en (1) resulta $f(a+2f(x))=f(x+af(x))$ para todo $x\in R$. Así por la inyectividad de f, $a+2f(x)=x+af(x)$ para todo $x\in R$. Como $a\neq 2$, $f(x)=\frac{x-a}{2-a}$. Sustituyendo esta función en (1) resulta que $a=1$, lo que proporciona dos únicas soluciones de la ecuación funcional inicial $f(x)=0$ y $f(x)=x-1$.

3. Sean x y n enteros tales que $1\le x<n$. Disponemos de $x+1$ cajas distintas y $n-x$ bolas idénticas. Llamamos $f(n,x)$ al número de maneras que hay de distribuir las $n-x$ bolas en las $x+1$ cajas. Encontrar los enteros n mayores que 1 para los que se verifica que el número primo p es divisor de $f(n,x)$ para todo $x\in\{1,2,\ldots,n-1\}$.

SOLUCIÓN. Claramente $f(n,x)$ es el número de combinaciones con repetición de $x+1$ elementos tomados de $n-x$ en $n-x$. Es decir,

$$f(n,x)=CR(x+1,n-x)=\binom{(x+1)+(n-x)-1}{n-x}=\binom{n}{x}.$$

Vamos a probar que los n buscados son todos los de la forma p^a con a entero positivo. Sea m_p la p-parte del entero positivo m, es decir si $m=p^a q$ (con $q\ge 1$ entero), $m_p=p^a$, siendo $a\ge 1$ entero. Ahora probaremos el siguiente resultado previo:

Si $m_p=p^a$, entonces $(m-i)_p=i_p$ para cada $i\in\{1,2,\ldots,p^a-1\}$

En efecto, si $i_p=p^k$ entonces $k<a$ y es obvio que $p^k|(m-i)$, luego $i_p\le(m-i)_p$. Recíprocamente, si $(m-i)_p=p^k$, ha de ser $k<a$ porque si no sería $p^a|i$. Ahora, $p^k|i$ porque $p^k|m$ y $p^k|(m-i)$. Es decir $(m-i)_p\le i_p$.

A continuación probaremos que si p es primo y n un entero mayor que 1. Entonces p divide a $\binom{n}{x}$ para todo $x\in\{1,2,\ldots,n-1\}$ si y sólo si $n=p^a$ con a entero.

Si $p\left|\binom{n}{x}\right.$ para todo $x\in\{1,2,\ldots,n-1\}$, $p\left|\binom{n}{1}\right.=n$. Poniendo $n_p=p^a$, se tiene:

$$\binom{n}{p^a}=\frac{n(n-1)\ldots(n-p^a+1)}{p^a(p^a-1)\ldots2\cdot1}$$

y por el resultado previo concluimos que la $p-$parte de $\binom{n}{p^a}$ es 1, luego $n=p^a$.

Recíprocamente, si $n=p^a$, para cada $x\in\{1,2,\ldots,p^a-1\}$,

$$\binom{n}{x}=\frac{p^a(p^a-1)\ldots(p^a-x+1)}{x(x-1)\ldots2\cdot1}$$

y de nuevo por el resultado previo, la $p-$parte de $\binom{n}{x}$ es $\frac{p^a}{x_p}$, que es múltiplo de p por ser $x<p^a$.

4. Hallar todos los números enteros positivos n y k, tales que $(n+1)^n=2n^k+3n+1$.

SOLUCIÓN. Para $n=1$, la ecuación se escribe $2=6$, claramente falsa. Luego $n\ge 2$. Por la fórmula del binomio de Newton,

$$(n+1)^n-1=n^2+\binom{n}{2}n^2+\binom{n}{3}n^3+\ldots$$

es múltiplo de n^2. Tenemos entonces dos casos a analizar:

- k = 1. Entonces, n^2 divide a $2n^1+3n=5n$, es decir, n divide a 5, con lo que $n=5$, y la ecuación se convierte en $6^5=26$, claramente falsa.
- $k\ge 2$. Entonces, n^2 divide a $2n^k+3n$, pero como divide a $2n^k$, también ha de dividir a $3n$, es decir, n divide a 3, con lo que $n=3$. Se comprueba fácilmente que para $n=3$, la ecuación se convierte en $4^3=2\times3^k+10$, luego en $3^k=27=3^3$, que es cierta si y sólo si $k=3$.

5. Una sucesión $(a_n)_{n\ge1}$ se define mediante la recurrencia

$$a_1=1,\ a_2=5,\ a_n=\frac{a_{n-1}^2+4}{a_{n-2}},\ \textbf{para } n\ge 3.$$

Demostrar que todos los términos de la sucesión son números enteros y encontrar una fórmula explícita para a_n.

SOLUCIÓN. Observamos a partir de la definición que $a_k a_{k-2}=a_{k-1}^2+4$ y $a_{k+1}a_{k-1}=a_k^2+4$. Restando a la segunda ecuación de la primera, resulta

$$a_{k+1}a_{k-1}-a_k a_{k-2}=a_k^2-a_{k-1}^2 \Leftrightarrow a_{k-1}^2+a_{k-1}a_{k+1}=a_k^2+a_k a_{k+2},$$

que es equivalente a su vez a $a_{k-1}(a_{k-1}+a_{k+1})=a_k(a_k+a_{k-2})$. Haciendo que $3\le k\le n$, se obtienen

$$\begin{gathered}a_2(a_2+a_4)=a_3(a_3+a_1),\\ a_3(a_3+a_5)=a_4(a_4+a_2),\\ a_4(a_4+a_6)=a_5(a_5+a_3),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n-2}(a_{n-2}+a_n)=a_{n-1}(a_{n-1}+a_{n-3}),\\ a_{n-1}(a_{n-1}+a_{n+1})=a_n(a_n+a_{n-2}).\end{gathered}$$

Multiplicando las igualdades anteriores y simplificando términos, resulta

XLVIII Olimpiada Matemática Española
Fase nacional 2012 (Santander)
Primera sesión (23 de marzo)

Problema 1

Determinar razonadamente si el número $\lambda_n = \sqrt{3n^2 + 2n + 2}$ es irracional para todo entero no negativo n.

Problema 2

Hallar todas las funciones $f : R \to R$ de variable real con valores reales, tales que

$$(x-2)f(y) + f(y + 2f(x)) = f(x + yf(x))$$

para todo $x, y \in R$.

Problema 3

Sean x y n enteros tales que $1 \le x < n$. Disponemos de $x+1$ cajas distintas y $n-x$ bolas idénticas. Llamamos $f(n,x)$ al número de maneras que hay de distribuir las $n-x$ bolas en las $x+1$ cajas. Encontrar los enteros n mayores que 1 para los que se verifica que el número primo p es divisor de $f(n,x)$ para todo $x \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre siete puntos.
El tiempo de cada sesión es de tres horas y media.

XLVIII Olimpiada Matemática Española
Fase nacional 2012 (Santander)
Segunda sesión (24 de marzo)

● Problema 4

Hallar todos los números enteros positivos n y k, tales que $(n+1)^n = 2n^k + 3n + 1$.

● Problema 5

Una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ se define mediante la recurrencia

$$a_1 = 1,\ a_2 = 5,\ a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 4}{a_{n-2}},\ \text{para } n \geq 3.$$

Demostrar que todos los términos de la sucesión son números enteros y encontrar una fórmula explícita para a_n.

● Problema 6

Sea ABC un triángulo acutángulo, ω su circunferencia inscrita de centro I, Ω su circunferencia circunscrita de centro O, y M el punto medio de la altura AH, donde H pertenece al lado BC. La circunferencia ω es tangente a este lado BC en el punto D. La recta MD corta a ω en un segundo punto P, y la perpendicular desde I a MD corta a BC en N. Las rectas NR y NS son tangentes a la circunferencia Ω en R y S respectivamente. Probar que los puntos R, P, D y S están en una misma circunferencia.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre siete puntos.
El tiempo de cada sesión es de tres horas y media.