



fp  
m

# La ciudad y las matemáticas

*José María Sorando*

12 de mayo 2009 · X Día escolar de las matemáticas



## La ciudad y las matemáticas

- Sin embargo yo he construido en mi mente un modelo de ciudad del que se deducen todas las ciudades posibles –dijo Kublai–. Incluye todo lo que responde a la norma. Como las ciudades que existen se apartan en distinta medida de la norma, me basta con prever las excepciones a la norma y calcular las combinaciones más probables.
- Yo también he ideado un modelo de ciudad del que deduzco todas las demás –contestó Marco Polo–. Es una ciudad hecha sólo de excepciones, exclusiones, contradicciones, incongruencias, contrasentidos. Si una ciudad así es lo más improbable que hay, al reducir el número de los elementos anormales aumentan las posibilidades de que la ciudad exista realmente. Me bastará con ir quitando excepciones a mi modelo, en cualquier dirección, para hallarme ante una de las ciudades que, siempre de forma excepcional, existen. Pero mi operación no puede ir demasiado lejos, pues obtendría ciudades demasiado verosímiles para ser verdaderas.

*Las ciudades invisibles*  
Italo Calvino

Celebramos este año la décima edición del *Día escolar de las matemáticas*. La iniciativa que empezó en 2000, coincidiendo con la celebración del Año Mundial de las Matemáticas, se ha ido consolidando paulatinamente. Cada año, el 12 de mayo, fecha del nacimiento de Pedro Puig Adam, pretendemos desbordar el ámbito de la clase y adentrarnos guiados por la matemática en otros ámbitos y simultáneamente traer al de las matemáticas temas de otras áreas de conocimiento. Este año el tema elegido ha sido la ciudad.

La ciudad es nuestro escenario vital. Una ciudad es un poliedro de vivencias y sentimientos que se aparece distinto según desde donde la miremos. Parque de nuestros juegos infantiles, interminable itinerario de nuestros paseos adolescentes, marco de nuestra actividad diaria, la ciudad es el primer entorno unitario que nos rodea, tras la casa y la calle y el barrio, que no son sino elementos menores de la misma ciudad.

Es nuestro universo primero y, como tal, una realidad compleja, compuesta de muchos elementos que se relacionan: la topología de las calles, la geometría de los edificios, las personas que interactúan, que se aman, que se soportan, que conviven, compartiendo el marco urbano. La ciudad es un ser vivo, que envejece, que se renueva, que brilla, que se hunde.

Las matemáticas nos ayudan a comprender realidades complejas, a analizarlas, a conocer sus problemas y a buscar maneras de acercarnos a las soluciones. Pensar matemáticamente la ciudad y sus problemas, dar paseos matemáticos por la ciudad para comprenderla y para amarla mejor, para vivirla mejor, esa es la propuesta de este año 2009. La misma ciudad, para cada uno de sus ciudadanos, es distinta y a la vez todas las ciudades, por distintas que sean, son la misma ciudad.

Francisco Martín Casalderrey  
Secretario General de la FESPM

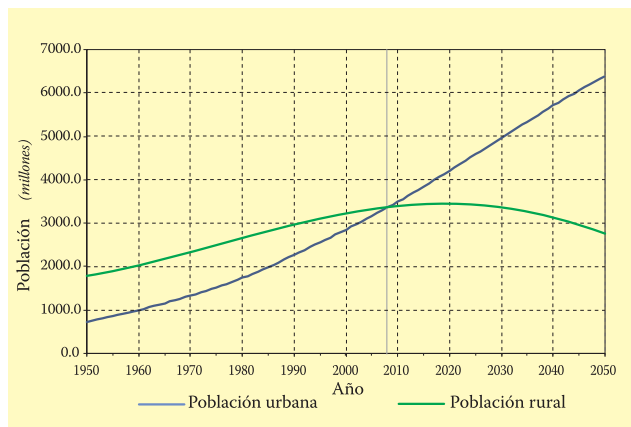


Las Matemáticas nos permiten profundizar en la percepción del mundo y en la experiencia: ordenándolas y buscando el control racional del espacio físico, de las situaciones problemáticas, así como de los fenómenos naturales y sociales.

La ciudad es la máxima expresión de una civilización, refleja su forma de entender y organizar la vida. Los problemas que plantea su diseño, ornamentación y funcionamiento muy a menudo encuentran soluciones en las Matemáticas. A su vez, éstas son una herramienta poderosa para conocer la realidad de la ciudad y prever su futuro.

## Ciudad y Población

La ONU en su Informe *Perspectivas sobre la Urbanización Mundial* [1] presenta este gráfico sobre la población rural y urbana en el mundo (1950–2050):



En 2008, por primera vez en la historia, la población urbana se iguala a la población rural y en los años próximos la población mundial acabará siendo urbana en su mayoría. Esto se debe a la rápida urbanización en las últimas décadas, especialmente en las regiones menos desarrolladas, donde la asociación entre ciudad y desarrollo explica el éxodo creciente del campo a la ciudad. En efecto, históricamente, el proceso de rápida urbanización empezó en las zonas más desarrolladas de hoy en día. Una consecuencia de esta situación es que si hoy existen 19 *megaciudades*, de más de 10 millones de habitantes, en 2050 serán 27.

## Actividad

Observa el gráfico y responde:

1. ¿Qué población mundial había en 1950? ¿En qué porcentajes era rural y urbana? ¿Qué población y qué porcentajes se prevén para 2050?
2. En las tres próximas décadas se espera un ritmo de crecimiento uniforme de la población urbana. ¿Sabrías expresarlo con un número (tasa de crecimiento)? Describe con detalle, usando el lenguaje de funciones, la evolución de la población rural.

## Geometría de la ciudad



### Ciudad romana

El Imperio Romano, para consolidar sus conquistas, construía ciudades amuralladas sobre los asentamientos de sus legiones (*castrum*). De forma más o menos rectangular, estaban orientadas por sus dos ejes de simetría, las dos calles principales: el *cardo*, de Norte a Sur, y el *decumanus*, de Este a Oeste. En la intersección de esos dos ejes, estaba el Foro o lugar de encuentro, ámbito de la vida pública. Las calles se alineaban paralelas a los ejes, formando una cuadrícula de manzanas. Esta estructura aún se aprecia, por ejemplo, en el plano del centro histórico de Zaragoza (Caesaraugusta), con el Coso (muralla), la Calle Don Jaime (*cardo*) y la Calle Mayor (*decumanus*) –en amarillo en el plano.



### Ciudad medieval

La ciudad medieval estaba amurallada y su trazado sinuoso e irregular, laberíntico en la ciudad islámica, no seguía una planificación. Pero en ese aparente desorden había una estructura: del centro, la plaza del mercado, salían calles estrechas y tortuosas, formando barrios que agrupaban a la gente por oficio, religión o procedencia. El centro histórico de Toledo conserva ese trazado.

### Ciudad moderna

Sobre los restos de la ordenada ciudad romana y de la irregular ciudad medieval, la ciudad moderna regulariza y ensancha calles, creciendo según tres tipos de diseños geométricos: radioconcéntrico, ortogonal o lineal. En cada ciudad observamos la agregación de unos y otros, reflejos de las sucesivas expansiones habidas en su historia. Al principio se conservan las murallas, con función no sólo defensiva, sino también de recaudación de tributos en sus puertas; luego, con los ensanches acabarán por ser derribadas.



### La ciudad radioconcéntrica

Se caracteriza por estar centrada en una plaza, rodeada de calles en círculos concéntricos. Del centro salen avenidas que las unen, los radios de esa trama circular. Su ventaja es la fácil y rápida circulación entre el centro y la periferia. Se forman cruces de  $120^\circ$ . Este modelo sólo se aplicó parcialmente en algunas ciudades (Vitoria) y su única plasmación integral está en la ciudad italiana de Palmanova.



Palmanova es además ejemplo de las ciudades fortificadas con forma de estrella del s. XVII, construidas en zonas fronterizas. Sus vértices tenían bastiones, cuyos entrantes y salientes estaban pensados para hacer mínima su exposición al fuego enemigo y máxima su eficacia artillera. Matemáticos al servicio de los reyes aplicaban sus conocimientos a la ingeniería militar.

### La ciudad ortogonal

Sus calles forman una cuadrícula regular: siguen dos direcciones perpendiculares y en cada dirección son paralelas a distancia constante.

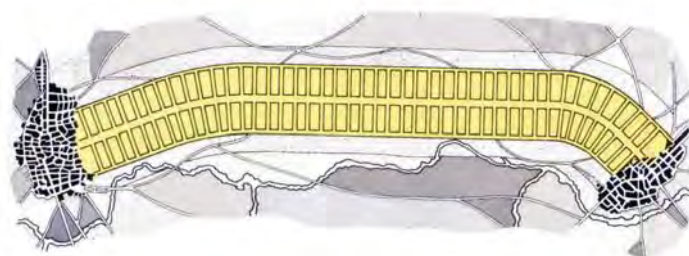
Aunque hay muchos antecedentes, su aplicación más ambiciosa se produjo en Barcelona, con el Plan de Ildefonso Cerdá para l'Eixample (ensanche) en 1860. Cerdá quería construir una ciudad pensada para las personas, desde una voluntad igualitaria, donde es equivalente circular por una calle o por una paralela, no las hay privilegiadas. Los cruces son de  $90^\circ$  y para mejorar la visibilidad se cortan en chaflanes. Los vértices de cada manzana coinciden con los puntos cardinales y todos sus lados tienen luz directa del sol a lo largo del día. Las casas no debían tener más de 16 m de altura, siendo la anchura de las calles 20 m, y así el sol entraría en toda la calle durante buena parte del día. Las manzanas, de 133 m de lado, debían estar construidas sólo en dos lados, dejando espacio para jardines. Aunque la especulación forzó que se construyera en los cuatro lados y se superasen las alturas previstas, éste sigue siendo un trazado de plena vigencia, 150 años después.



El modelo barcelonés fue generalizado con la Ley del Ensanche (1864) para dar respuesta a las demandas de la pujante burguesía industrial, cuya expansión quedaba ahogada en las ciudades antiguas. Pero en algún caso había más motivaciones.

Tras las revueltas de 1830 y 1848, Napoleón III encargó al Barón Haussmann que modernizara París haciéndola una ciudad más *segura*. Se trataba de impedir el bloqueo de las estrechas calles con barricadas revolucionarias. Se derribó el 60% de la ciudad antigua, construyendo amplísimas avenidas rectilíneas por las que pudiera avanzar fácilmente un batallón y disparar un cañón. Fueron clave para aplastar la Comuna de París en 1871. Curiosamente, la geometría urbana puede favorecer tanto ideales igualitarios como su represión.

### La ciudad lineal



*Proyecto de la Ciudad Lineal – Arturo Soria y Mata (1886)*

El modelo lineal es la urbanización a lo largo de una vía de comunicación (carretera, río, etc.). A finales del s. XIX fue teorizado por Arturo Soria para superar la dicotomía entre el campo y la ciudad: proponía una ciudad alargada de 500 m de ancho, con una vía central de 50 m de ancho por la que circulaba el tren. Con estos tramos lineales se formaría una trama triangular con el campo en el interior, junto a la ciudad.

Se trataba de descongestionar las ciudades y lograr su contacto con la naturaleza; también, minimizar la suma de trayectos de todos los puntos entre sí. De la superficie de las parcelas, un quinto sería para viviendas y el resto para la agricultura. Este modelo sólo se llevó a cabo en Madrid, con 700 casas unifamiliares a lo largo de 5 km.

Un ejemplo famoso de avenida construida a lo largo de una ruta de comunicación es la Comodoro Rivadavia de Buenos Aires (Argentina), que sigue el antiguo Camino Real del Oeste. Mide más de 35 km y sus casas pasan del número 26 000.

### Actividad

Sobre los modelos radioconcéntrico, ortogonal y lineal, estudia cuál es la distancia más corta entre dos puntos circulando por la calle y si puede ser recorrida por un único camino. Si hay varios, calcula el número de caminos de distancia mínima y busca una fórmula. ¿Cuántos puntos equidistan de uno dado? ¿Forman una circunferencia?

## Paseo matemático por la ciudad

Demos un paseo por las calles de la ciudad. Encontraremos la presencia matemática en multitud de aspectos, desde los más solemnes a los más sencillos y cotidianos.

### Callejero matemático

Para empezar, algunas pocas calles tienen nombre de matemáticos y astrónomos.



A veces los nombres de las calles remiten a conceptos matemáticos o los sugieren\*.



\* El Maestre Racional era el Ministro de Hacienda de la Corona de Aragón (s. XIII a XVII)

### Vamos de tiendas

Que las calles tengan nombres matemáticos no es habitual, pero las tiendas y entidades sí los tienen y en abundancia, cubriendo todas las ramas de las Matemáticas.





### Mobiliario Urbano

En las calles encontramos múltiples objetos de uso público cuyo diseño geométrico combina ángulos, cuerpos de revolución, poliedros, simetrías, etc.



San Sebastián



Zaragoza



### Casas

La mayoría de las viviendas siguen pautas estándar y cuesta distinguir en ellas elementos singulares. Pero en los centros de las ciudades encontramos algunas que son especiales. En la segunda mitad del s. XIX y primera del XX, la rica burguesía mostraba su esplendor en la arquitectura y decoración de sus casas: con motivos florales, mitológicos y también geométricos. Fijémonos en sus fachadas, balcones, cornisas, patios y escaleras. Fotos: estrella de círculos, cenefas, hélice, simetría de espirales en progresión, mosaico y polígonos.







Y los escaparates son terreno para los números.

### Actividad

Observa la foto de la izquierda. Se ve que en esa tienda quieren ser muy precisos. ¿Qué descuento hacen? ¿Consiguen la precisión deseada?

En otra tienda me dicen: *Primero rebajamos los precios el 20% y luego los hemos rebajado un 30%. Ahora todo está a mitad de precio.* ¿Es correcto?

utilidad y estética: farolas, marquesinas, kioscos, papeleras, cabinas y bancos. En ellos observamos:



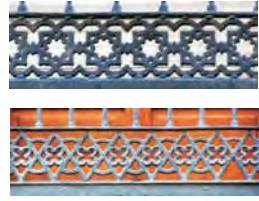
Granada



Valencia

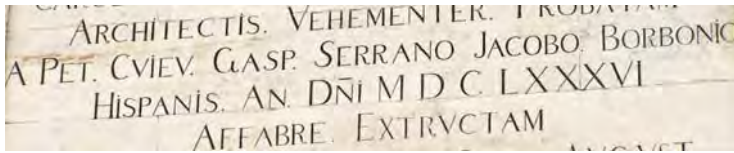
Foto: Alejandro Herrero Alapont





## Monumentos

Los antiguos monumentos son el lugar de reposo de la bimilenaria numeración romana.



Los monumentos modernos usan de las formas geométricas, por sus valores estético, descriptivo o conceptual. El simbolismo fue utilizado mucho antes en los templos, donde las formas expresan creencias (la espiral alude a la Resurrección).



Madrid, Monumento a la Constitución



Zaragoza, Iglesia de Santa Isabel

## Jardines

En los jardines admiramos la disposición de árboles y senderos, los macizos de flores, las formas de setos recortados y las parábolas de agua en los surtidores. Se crean espacios de armonía donde la Naturaleza ha sido ordenada por la Geometría.



## Nueva arquitectura

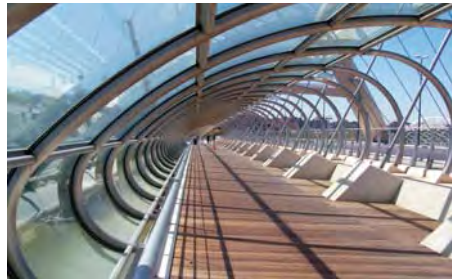
En las construcciones corrientes se prodigan los planos paralelos y perpendiculares. Por ello, los edificios emblemáticos del actual desarrollo de las grandes ciudades buscan singularidad, rompiendo esa uniformidad con curvas y ángulos nuevos. Lo mismo sucede en las construcciones de espacios públicos: estaciones, puentes, aeropuertos o auditorios.



Zaragoza, Torre del Agua



Madrid, Terminal T4 de Barajas



Zaragoza, Puente del Milenio



Valencia, Oceanographic



Zaragoza, Pasarela del Voluntariado

## Actividad

Hemos mostrado algunos aspectos matemáticos en las calles de las ciudades. Ahora, sal a pasear y búscalos en tu propia ciudad. Empieza tu propia colección de fotos matemáticas.

## Calidad de vida en la ciudad

Llamamos calidad de vida a relacionarnos con nuestro medio de forma gratificante y responsable: poder pasear por un parque cerca de casa y por calles sin humo, ruidos ni atascos; no perder horas en desplazarnos al trabajo; participar en una gestión ecológica de los residuos... son ejemplos de esa relación deseada. El diseño y organización de la ciudad influyen en nuestra calidad de vida y en eso las Matemáticas tienen mucho que aportar. Hay que conocer la realidad con estadísticas, números índices o porcentajes. Y a partir de ahí, encontrar soluciones imaginativas aplicando la Geometría, la Programación Lineal, la Optimización, y siempre la Lógica.

### Zonas verdes



La Organización Mundial de la Salud recomienda disponer de al menos entre 10 y 15 m<sup>2</sup> de zonas verdes por habitante, distribuidos equitativamente en relación a la densidad de población. Vitoria, 20,8; Logroño, 18,3; Pamplona, 16,9; Madrid, 15,9; y Santander, 14,9; superan esa ratio; y Barcelona, Bilbao, Málaga, Valencia y A Coruña no llegan a 7m<sup>2</sup> [2]. Pero ese número, siendo importante, puede falsear la realidad próxima si en mi barrio no hay parques y sí los hay en barrios alejados.

### Actividad

Calcula los m<sup>2</sup> de zonas verdes por habitante en tu barrio. Busca el dato de población en la *web* municipal o en la Junta de Distrito. Consigue planos o fotos aéreas (por ejemplo, en *Google Earth*) de cada plaza, jardín o parque del barrio y calcula las superficies.

Un parque no siempre tienen forma geométrica regular. Triángúlalos y calcula el área de cada triángulo usando la Fórmula de Herón:  $\text{Área} = \sqrt{p \cdot (p - a)(p - b)(p - c)}$  donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son los lados y  $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ . Por último, ten en cuenta cómo hay que aplicar la escala, ¡en este caso a superficies, no a longitudes!



Zaragoza, Parque de Delicias  
Infografía: J. L. Garde



## Regulación del tráfico

William Eno, *padre de la seguridad del tráfico*, se preocupó a finales del siglo XIX de los inmensos atascos provocados en Nueva York por vehículos de tiro animal, proponiendo soluciones como semáforos, prioridades de paso, islotes de peatones, etc; ideas que hoy parecen evidentes, pero que antes eran desconocidas. Fue una de esas personas que no consideran las situaciones como inevitables, sino como problemas pendientes de solución. En muchos casos, esa solución es matemática.

### Dirección y sentido

Una calle, como una recta, tiene una sola dirección pero tiene dos sentidos. La señal conocida popularmente como *dirección prohibida* debiera llamarse *sentido prohibido*, pues no prohíbe circular sobre esa dirección, sino sólo en uno de los dos sentidos.

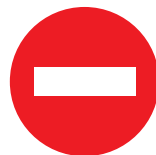
En las rotondas hay dos posibles sentidos de giro y está establecido como obligatorio el contrario a las agujas del reloj, el mismo que rige para la medida de ángulos en la circunferencia.

### Coordinación de semáforos

En un mismo semáforo, los tiempos de las secuencias verde-rojo varían según el día y la hora (p.e. para dar prioridad a los vehículos que van o vuelven del trabajo en días y horarios laborales), o según las circunstancias (p.e. dar vía libre a los de bomberos). Hay también sensores que detectan el flujo de tráfico y el sistema reacciona a la situación. Los sistemas modernos no encienden y apagan los semáforos de una calle a la vez; van poniendo las luces en verde de forma escalonada, creando una ola verde para que los vehículos vayan encontrando paso libre en todos ellos y no deban parar.



Anónima (Internet)



## Actividad

A lo largo de una calle hay tres semáforos, en los puntos A, B y C. Un vehículo que va a la velocidad permitida pasa de A a B en 15 seg y de B a C en 25 seg. Los técnicos de viabilidad han fijado estas secuencias: en A, 70 seg verde y 30 seg rojo; en B, 65 seg verde y 35 seg rojo; en C, 75 seg verde y 25 seg rojo.

- Diseña la peor programación de semáforos en esa calle: para que un coche pueda estar parado el mayor tiempo posible. ¿Cuánto dura la ola verde en ese caso?
  - Diseña la mejor programación: para que la duración de la ola verde sea máxima.
- Idea: puedes representar cada programación mediante tres líneas temporales.

## El transporte urbano



En nuestras ciudades, el 50% de los viajes en coche son para recorrer menos de 3 km, y un 10% para menos de 500 m. En estos viajes cortos el incremento medio de consumo es de un 60% ¡cuando en la mayoría de los casos estos desplazamientos se podrían hacer perfectamente a pie o en bicicleta! Con su actual índice de ocupación (sólo 1,3 pasajeros por vehículo), el coche es el modo de transporte menos eficiente y más contaminante. Más del 75% de los desplazamientos urbanos se realizan en vehículos privados con un solo ocupante [3]. Una vez más, los números expresan la realidad y nos hacen reflexionar.

### Actividad

Sítuate en una calle concurrida y haz recuento del número de personas que viajan en 50 coches. Haz una estadística completa con los datos obtenidos.

El transporte público, por viajero, ocupa 50 veces menos espacio y emite un 70% menos de  $\text{CO}_2$  que el vehículo privado. Además, consume menos energía y es más barato para el usuario.

Hay medidas que favorecen el transporte colectivo y el privado no contaminante: abonos económicos; billetes con transbordos incluidos; paneles informativos de tiempos de espera en las paradas de bus, mediante GPS; carriles sólo para bus y vehículos con alta ocupación; sistema de bicicletas públicas; carriles bici; etc.

Pero, sobre todo, se precisa una toma de conciencia ciudadana para conseguir un modelo de movilidad eficiente y sostenible. Utilizando medios de transporte colectivo y sistemas de coche compartido, contribuiremos a mejorar la vida en nuestra ciudad.

### Actividades

- Los precios actuales del bus urbano en mi ciudad son:  
 1 viaje: 0,90 €    bono 10 viajes: 5,00 €    abono mes: 34,30 €  
 Para cada una de esas tres opciones, expresa como función y representa gráficamente la relación entre el número de viajes realizados y el precio a pagar. Razona a quiénes interesa más cada opción.
- Para ir al trabajo puedo elegir entre dos líneas de bus: la línea *A* que pasa cada 6 min. o la línea *B* que pasa cada 8 min. Cuando llego a la parada, subo en el primer autobús que llega, sea *A* o *B*. ¿Qué probabilidad hay de que coja cada uno de ellos?

## El reciclado de basuras

La ciudad es una gran fábrica de basura. Cada español genera 525 kg de basura al año. Si esta basura termina en un vertedero, una lata tardará 10 años en degradarse; una botella de plástico, 100 años; y una botella de vidrio, 4 000 años. Sin embargo, reciclar una lata ahorra la energía que gasta un televisor durante 3 h; y una botella de vidrio, el consumo de una bombilla de 100 w encendida 4 h. El reciclado de 1 Tm de envases ligeros o 2 Tm de tetrabricks permite ahorrar 1 Tm de petróleo.

La colaboración ciudadana está avanzando mucho en este terreno. La recogida selectiva de basuras en España se ha duplicado en el último lustro. Pero todavía representa sólo un 15% de toda la basura generada. Podemos hacer más. Clasificar la basura puede ser nuestra aportación diaria a un modo de vida más respetuoso con el medio ambiente. Además, claro está, de evitar el consumo inútil (por ejemplo, de agua).



## Actividad

En mi ciudad los contenedores de recogida selectiva de basura tenían forma de ortoedro, con 155 cm, de largo, 115 de ancho y 162 de alto. El Ayuntamiento los está cambiando por otros con la misma longitud pero mayor capacidad. Sus medidas son: Recipiente troncocónico: base inferior 155×120; base superior 165×140; altura 130. Cubierta casi semicilíndrica: altura 58. Con este cambio se quiere evitar la acumulación de basuras fuera del contenedor cuando la recogida se retrasa, sin quitar más espacio de aparcamiento. Haz una estimación (no hace falta el cálculo preciso) del aumento de capacidad de los nuevos contenedores con respecto a los anteriores.

*Diseño y Maquetación:* Francisco Martín Casalderrey  
*Fotos aéreas e infografías:* internet

*Fotos a pie de calle:* José María Sorando, salvo cuando se indica otra autoría

- Referencias:*
- [1] *World Urbanization Prospects-2007 revision*, ONU, New York 2008
  - [2] Revista *Consumer Eroski* Noviembre 2002
  - [3] Web del IDAE (Ins. Diversif. y Ahorro Energía) [www.idae.es](http://www.idae.es)



Federación Española de Sociedades  
de profesores de  
Matemáticas

Servicio de publicaciones  
Apartado de correos 590  
06080 Badajoz  
[www.fespm.es](http://www.fespm.es)  
[publicafespm@wanadoo.es](mailto:publicafespm@wanadoo.es)

*La ciudad y las matemáticas*  
*José María Sorando*

Maquetación y edición FMC  
Imprime TECNIGRAF, S.A. Badajoz  
© 2008