



# Dimensión fractal del contorno de una ciudad

Desde hace sólo unas décadas los fractales han aparecido y se han hecho hueco entre nosotros con multitud de aplicaciones.

Se presenta una actividad que relaciona los fractales, y más concretamente la dimensión fractal, con las ciudades. Es necesario una cierta base en el concepto de fractal y dimensión fractal para poder realizar la actividad, pero seguro que el esfuerzo merece la pena al comprobar que estamos “rodeados” por estos entes matemáticos, viendo además que pueden sernos útiles.

Se ofrece una breve incursión en el concepto de fractal y dimensión fractal, para pasar posteriormente a una propuesta de trabajo con indicación de un posible orden en los pasos a seguir para estimar la dimensión fractal del contorno de una ciudad.

Para facilitar el trabajo se presenta una ejemplificación con la ciudad de La Unión (Murcia) al surgir esta actividad a partir de la elaboración de materiales para la VIII Semana Temática titulada

$\pi$   $\times$  2  $\times$  los Fractales

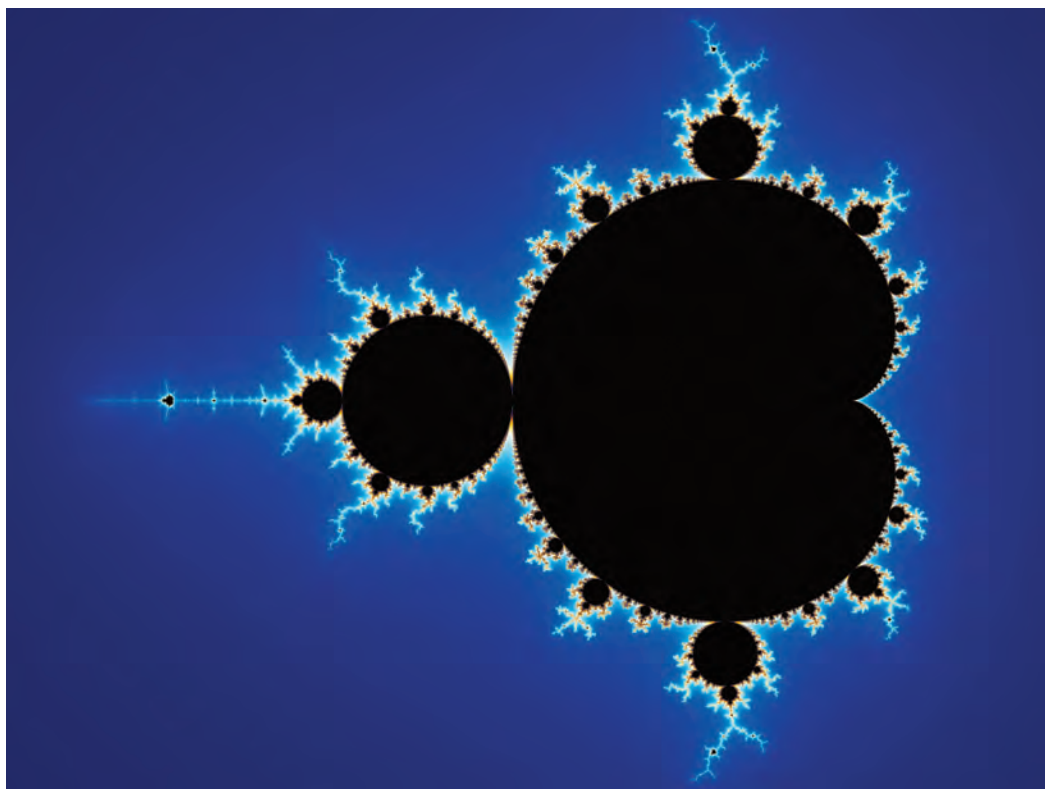
que realizaremos durante el curso 2009-2010 en el IES Sierra Minera de dicha localidad. Desde el Departamento de Matemáticas hemos realizado entre otras actividades el cálculo de la dimensión fractal de las localidades a las que pertenecen los alumnos del centro con el objetivo de comparar la “rugosidad” del contorno de todas ellas.

## Concepto de Fractal

Las formas que se encuentran en el mundo real carecen de la simplicidad de una línea, un cuadrado o un cubo: poseen una riqueza de detalles, complejidad e irregularidad que no pueden describirse con la Geometría clásica, la Geometría de Euclides. Su descripción por medio de métodos tradicionales es insuficiente, lo que ha motivado la búsqueda de nuevas formas de analizar y describir objetos, ya sean reales o abstractos.

Como respuesta a esta búsqueda, Benoît Mandelbrot desarrolló una nueva geometría de la naturaleza que según sus palabras “permite describir muchas de las formas irregulares y fragmentadas que nos rodean, dando lugar a teorías coherentes, identificando una serie de formas que llamo fractales” [Mandelbrot, 1977]. Esta nueva geometría intenta cuantificar la textura o rugosidad de los objetos, expresándola mediante valores numéricos.

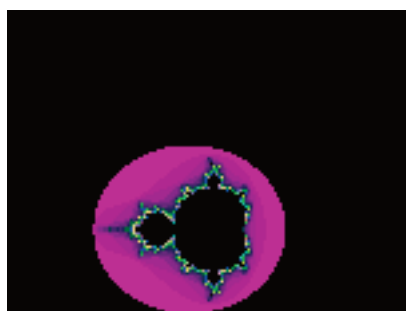
Mandelbrot comenzó a aplicar esta nueva geometría en una serie de campos, y su camino ha sido seguido por numerosos investigadores que se han interesado en su trabajo, promoviendo la aplicación de la geometría fractal a situaciones concretas.



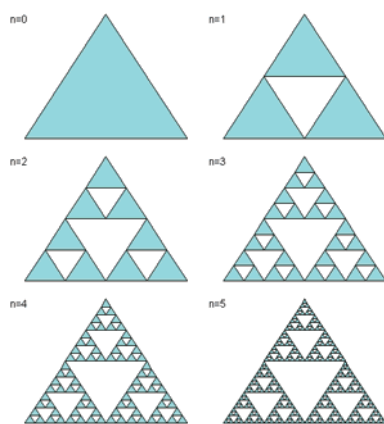
*Fractal de Mandelbrot*

Sin entrar en una definición formal de lo que es un fractal, vamos a enumerar sus principales características:

- Un fractal tiene una estructura fina, es decir, podemos encontrar la estructura en escalas arbitrariamente pequeñas.
- Un fractal es demasiado irregular para ser descrito con la Geometría tradicional, tanto local como globalmente.
- Con frecuencia un fractal tiene una cierta forma de autosemejanza, quizás aproximada o estadística.
- En general, la *dimensión fractal* es mayor que su dimensión topológica.



Zoom en el *Fractal de Mandelbrot* en el que se puede comprobar la riqueza de su estructura a diferentes escalas

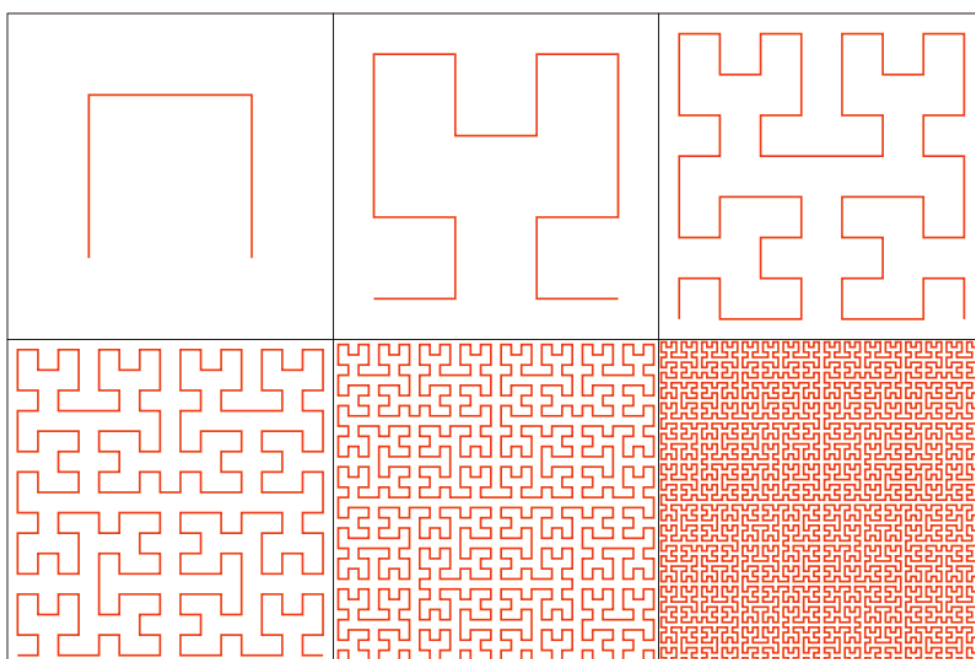


Construcción del *Triángulo de Sierpinski* en la que se puede comprobar su autosemejanza

El campo de aplicación de la geometría fractal es tan amplio que abarca desde la física, biología, medicina, geografía, mineralogía, química, hasta la generación de imágenes cinematográficas y compresión de imágenes, por citar sólo algunos ejemplos. A medida que los investigadores de las diferentes disciplinas conocen la geometría fractal, mayores son las aplicaciones de ésta.

### Dimensión Fractal

La noción de *dimensión fractal* provee una forma de medir la *rugosidad* de una curva. Normalmente se consideran a las líneas como de dimensión 1. Sin embargo, una curva rugosa que recorra una superficie, en el extremo puede ser tan rugosa que efectivamente llene la superficie en la cual se encuentra, en cuyo caso tendría dimensión 2, como por ejemplo la curva de Hilbert.



*Curva de Hilbert*



Se puede pensar por lo tanto en la rugosidad como en un incremento de la dimensión: una curva rugosa tiene dimensión entre 1 y 2, mientras que una superficie rugosa tiene dimensión entre 2 y 3. Desde este punto de vista, rectas y planos pueden pensarse como casos límite. En una curva, la dimensión fractal es un número que caracteriza la forma en la cual la longitud medida entre dos puntos dados crece mientras la escala decrece.

Un fractal determinista, en cualquier escala de observación, dará el mismo valor de dimensión fractal, o sea, es perfectamente autosemejante. Pero, el contorno de una ciudad no es un fractal determinista, con lo que la comprobación de autosemejanza no registrará valores de dimensión fractal idénticos, aunque podemos admitir, al encontrar valores similares, que la forma muestra propiedades análogas a la autosemejanza fractal. Esta es en parte debido a que la morfología de una ciudad es el resultado de una multitud de procesos físicos y sociales. Estos incluyen la tecnología de la construcción, patrones de tenencia de la tierra, el tamaño de los terrenos con construcciones, la demanda de espacios residenciales, la movilidad de la población, y la eficiencia y disponibilidad de la tecnología de los transportes.

Todos estos procesos se manifiestan a diferentes escalas, por ejemplo, las tecnologías de construcción se manifiestan a escalas relativamente pequeñas, y las de transporte a escalas mayores. Se puede concluir razonablemente que esos procesos se reflejen en el contorno de la ciudad, y por lo tanto en su irregularidad y dimensión fractal.

### Propuesta de trabajo

Con el objetivo de calcular la rugosidad del contorno de una ciudad (consideramos dicho contorno como un fractal aleatorio o estadístico) se pueden aplicar técnicas de geometría fractal, en particular estimaciones de la dimensión fractal del contorno de la ciudad.

Para la obtención de los contorno de la ciudad se emplea el análisis visual de imágenes por satélites (en nuestro caso hemos utilizado el programa gratuito *Google Earth*).

Una vez obtenida la imagen por satélite se digitaliza el contorno con un programa de dibujo y se debe pasar a imagen binaria en formato TIFF o BMP.

En este tipo de análisis, se encuentran problemas usuales de definición para determinar el límite entre la ciudad y su entorno, y para ello es necesario aplicar ciertas reglas de aproximación. Por lo general, se excluyen parcelas y otros terrenos de uso rural cerca del borde, pero grandes parcelas que forman parte de establecimientos industriales se incluyen solamente si existen desarrollos urbanos próximos.

Cada uno de los contornos obtenidos es una curva de la que se puede calcular computacionalmente una estimación de la dimensión fractal mediante el método de conteo de cajas<sup>1</sup> –*box counting*–, utilizando para ello el programa *Fractalyse* desarrollado por el Research Centre Thénia (CNRS-Université de Franche-Comté) y que se puede descargar gratuitamente desde la página <http://www.fractalyse.org/en-home.html>. Podemos encontrar otros programas como *ImageJ* desarrollado por Wayne Rasband del *National Institutes of Health*.

### Actividad paso a paso

1. Conocer los conceptos de fractal y de dimensión fractal. Para ello se pueden consultar el visionado del vídeo de la colección Más por Menos: “Fractales. La Geometría del Caos” e innumerables páginas web como las que hemos seleccionado:



<http://www.arrakis.es/~sysifus/>

<http://coco.ccu.uniovi.es/geofractal/>

<http://centros5.pntic.mec.es/sierrami/dematesna/demates23/opciones/investigacion/fractales/fractales.htm>

<http://centros5.pntic.mec.es/sierrami/dematesna/demates56/opciones/investigaciones%20matematicas%200506/Fractales/index.htm>

2. Establecer el objetivo del trabajo: estimar la dimensión fractal del contorno de la localidad con el propósito de poder tener información sobre su rugosidad. Para ello puede ser conveniente revisar la ejemplificación que se presenta más adelante sobre la localidad de La Unión (Murcia).
3. Obtener una imagen por satélite de la localidad a la menor escala en que se pueda ver todo su contorno. Para ello se pueden utilizar los programas *Google Maps* o *Google Earth*.
4. Utilizar un programa de dibujo para seleccionar el contorno de la localidad, quedarnos únicamente con dicho contorno (mediante el uso de capas) y pasar la imagen a formato *bmp* con una profundidad de dos colores (así lo requiere el programa informático que calcula la dimensión fractal).
5. Ejecutar el programa *Fractalyse*, cargar la imagen obtenida, y seleccionar *Analyse/Box* y dentro del menú emergente el tamaño de Caja como *exponencial* y el algoritmo tipo *rejilla*. Obtendremos entre otras datos la dimensión fractal (*dim*) buscada.
6. Reflexionar sobre la *rugosidad* de la localidad revisando todos los datos obtenidos y comparando la dimensión con la de otras localidades.
7. Completar el estudio trabajando con las coordenadas geográficas del lugar, condiciones orográficas e información de interés sobre la localidad.

### Ejemplo. Dimensión fractal de La Unión (Murcia)

Los pasos 1 y 2 son preparatorios y en nuestro caso lo hemos trabajado con los alumnos tanto en clase como en casa.

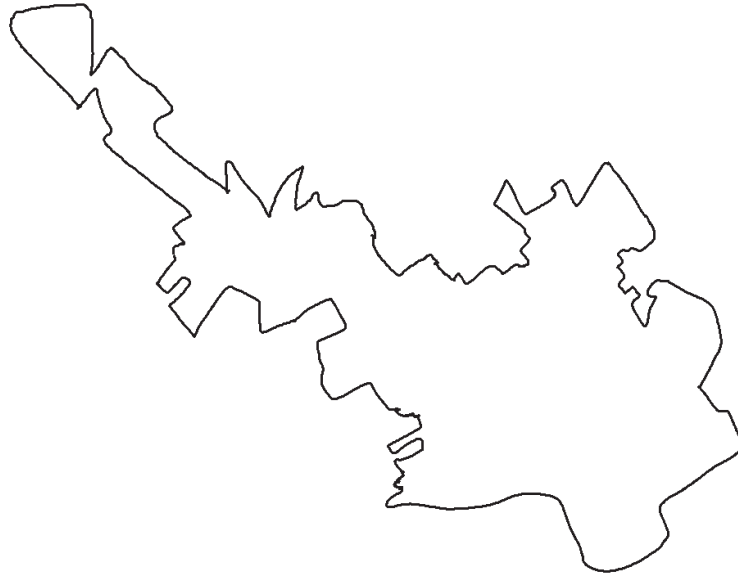
En el paso 3, utilizando el programa *Google Earth* obtenemos la siguiente imagen:



Vista de La Unión



En el paso 4, utilizando un programa de dibujo que permita trabajar con capas, podemos obtener una imagen al remarcar el contorno. Esto conlleva un cierto grado de subjetividad para establecer la curva que determina el contorno y conviene previamente establecer qué entendemos por contorno (si se incluye un polígono industrial, o una finca algo alejada...).



Contorno de La Unión

En el paso 5, ejecutamos el programa Fractalyse y cargamos la imagen del contorno obtenida.

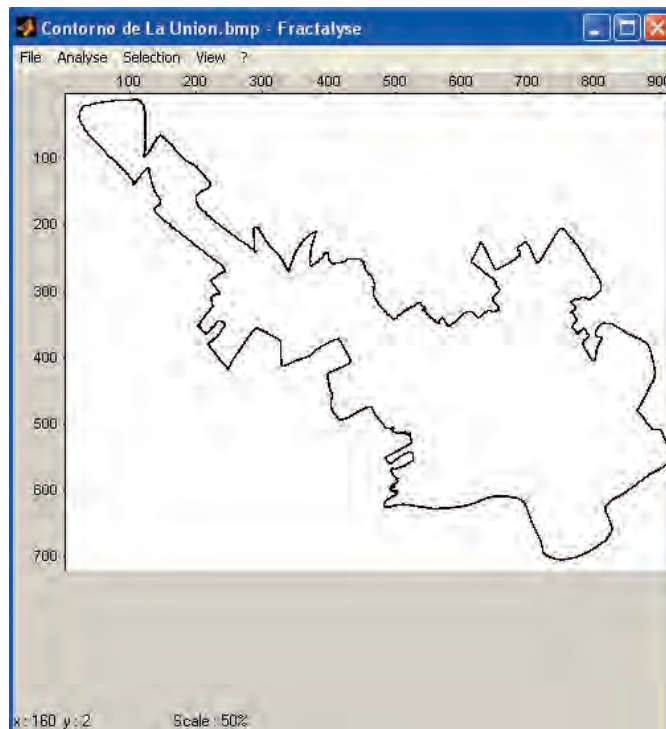
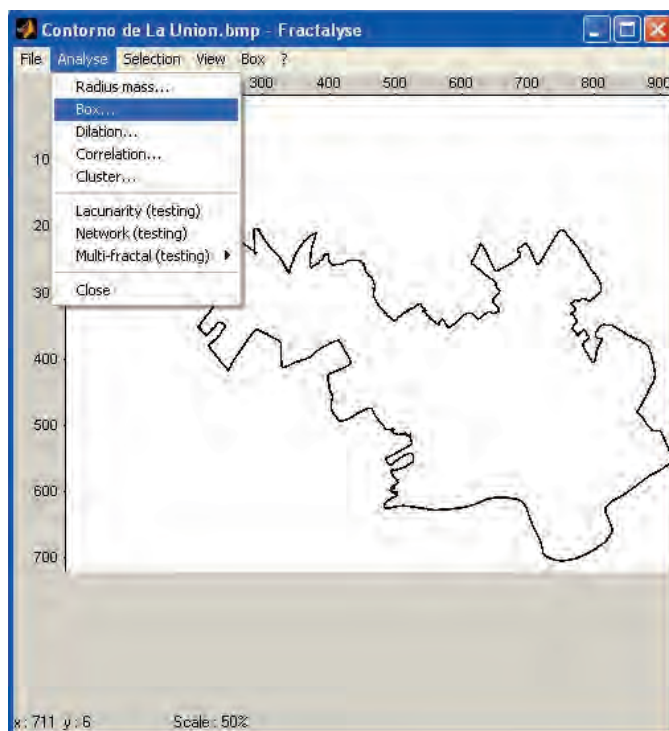


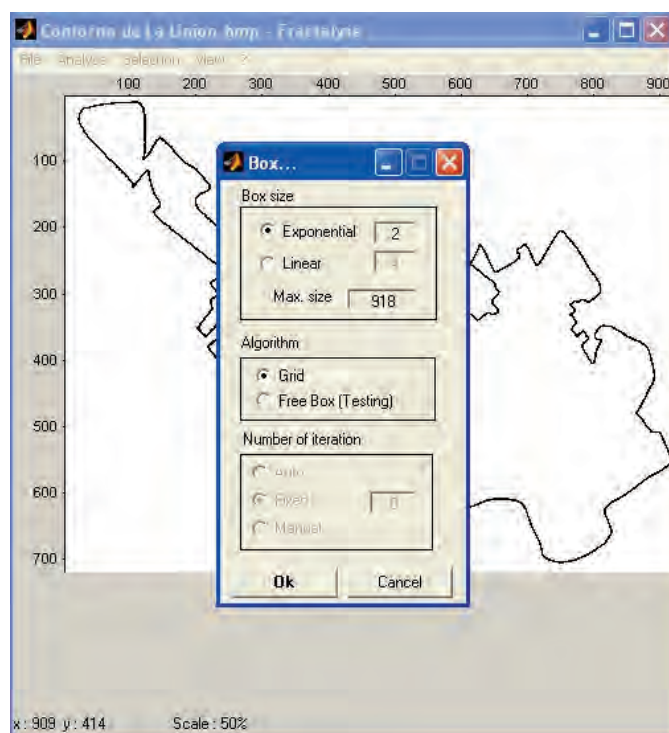
Imagen del contorno de La Unión cargada en el programa Fractalyse

Seleccionamos *Analyse/Box*.



Selección del tipo de estimación

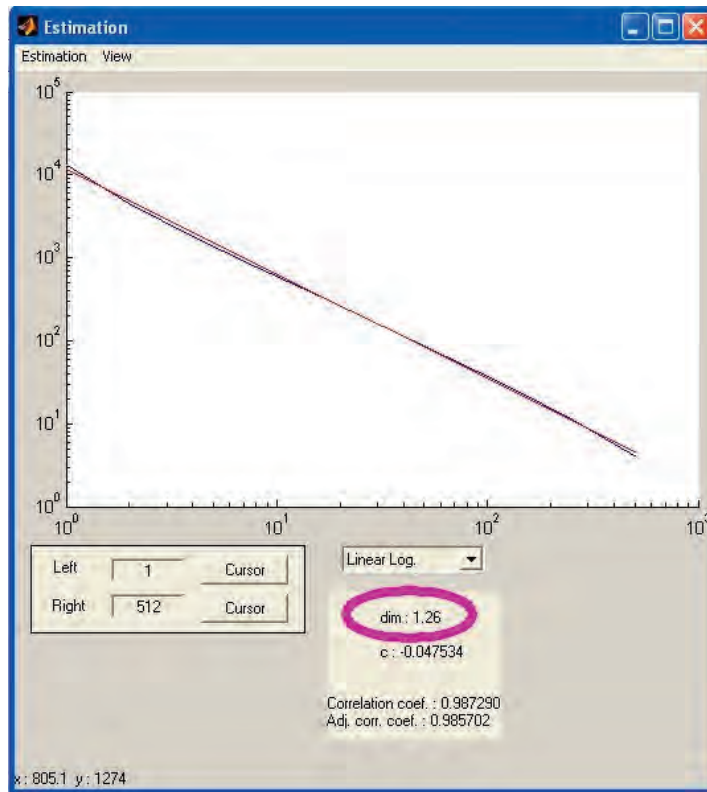
Dentro del menú emergente seleccionamos el tamaño de caja como exponencial (*Exponential*) y el algoritmo tipo rejilla (*Grid*). Seleccionamos *OK*.



Selección de parámetros del tipo de estimación

Obtendremos entre otros datos la estimación de la dimensión fractal (*dim*) del contorno de La Unión que es 1,26.

En el paso 6 podemos concluir si comparamos con las dimensiones de otros localidades que La Unión tiene una un contorno algo rugoso, pero no exceso.



Resultados obtenidos con la estimación

En el paso 7 vemos que la fotografía utilizada fue tomada por el satélite el 20 de julio de 2007 y la hemos “realizado” a 910 metros de altura. Las coordenadas geográficas de la localidad (tomando como punto de referencia la zona central de la localidad) son 37° 37’ Norte y 0° 53’ Oeste.

La Unión es un municipio de la Región de Murcia con unos 16.000 habitantes situado al sureste de la región, entre las playas del Mar Menor y el Mar Mediterráneo que goza de un paisaje único y distinto. Sus montañas pintadas de plomo y plata, mezcladas con pincladas de hierro, manganeso, cinc, blenda o piritita, confieren al paisaje un estilo peculiar, marcado intensamente por la huella que la industria minera ha dejado a lo largo de siglos de actividad. Pertenece a la Comarca del Campo de Cartagena y al partido jurídico de Cartagena. El termino municipal está estructurado en dos pedanías además de la propia ciudad de La Unión, Roche y Portmán.

La economía de La Unión se basó durante mucho tiempo en la explotación de las minas de su sierra. Tras larga decadencia, nuevas iniciativas y procedimientos de explotación animaron la minería hacia los años 60. Agotadas o abandonadas por poco rentables las distintas explotaciones, La Unión se ha ido convirtiendo en una ciudad dormitorio de Cartagena. También tiene relativa importancia para La Unión el turismo, por su cercanía a las playas del Mar Menor. Asimismo, ha alcanzado celebridad internacional, a partir de su misma institución en 1960, el *Festival del Cante de las Minas*, donde cada año cobran nueva vida los cantes de la región (por ejemplo, *taranta*, *minera*, *cartagenera*, *murciana*, etc.) junto a los demás subgéneros del flamenco *jondo*.





## Conclusiones

La estimación de la dimensión fractal del contorno de una ciudad puede ser una buena herramienta para sumergirnos en el apasionante mundo de los fractales y para descubrir alguna de sus múltiples aplicaciones.

La experiencia que hemos realizado desde el Departamento de Matemáticas con alumnos de 4º ESO así lo corrobora y esperamos que otros alumnos puedan probar su potencial para realizar investigaciones en Matemáticas.

Es importante tener en cuenta que el objetivo del cálculo de la dimensión fractal del contorno de una ciudad con alumnos de Secundaria quizá no esté tanto en el procedimiento del cálculo (algo en cierta forma mecánico) si no en la posibilidad de conocer el comportamiento y utilidad de los fractales mediante un trabajo de investigación, ayudando a reforzar la presencia de las matemáticas en nuestra sociedad.

## Bibliografía y programas utilizados

Mandelbrot, B.B. (1977): *La Geometría Fractal de la Naturaleza*. Traducción Josp Llosa. Tusquets Editores. Barcelona. Octubre 1997. Primera edición. Título original: *The Fractal Geometry of Nature*

Estudio comparado de la dimensión fractal aplicado al contorno de dos ciudades  
[http://www.geogra.uah.es/inicio/web\\_11\\_confibsig/PONENCIAS/2-057%20Peri-Antes-Serafini.pdf](http://www.geogra.uah.es/inicio/web_11_confibsig/PONENCIAS/2-057%20Peri-Antes-Serafini.pdf)

Propuesta de medición de la dimensión fractal: la ciudad-materia y la cuadrícula urbana  
<http://www.architravedtc.com/CiudadMateria.htm>

Página realizada por los alumnos de las asignaturas de Matemáticas del IES Sierra Minera (La Unión, Murcia), con investigaciones y curiosidades matemáticas.  
<http://centros5.pntic.mec.es/sierrami/dematesna/>

Área Fractal  
<http://www.arrakis.es/~sysifus/>

Geometría Fractal  
<http://coco.ccu.uniovi.es/geofractal/>

Investigación sobre Fractales  
<http://centros5.pntic.mec.es/sierrami/dematesna/demates23/opciones/investigacion/fractales/fractales.htm>  
<http://centros5.pntic.mec.es/sierrami/dematesna/demates56/opciones/investigaciones%20matematicas%200506/Fractales/index.htm>

Comentarios sobre el video de la colección *Más por Menos*: "Fractales. La Geometría del Caos"  
<http://centros5.pntic.mec.es/sierrami/dematesna/demates89/opciones/sabias/video%20fractales/video%20fractales.htm>

Información sobre La Unión  
[http://es.wikipedia.org/wiki/La\\_Uni%C3%B3n\\_\(Murcia\)](http://es.wikipedia.org/wiki/La_Uni%C3%B3n_(Murcia))

Google Earth: <http://earth.google.com/>

Fractalys: <http://www.fractalys.org/>

ImageJ: <http://rsbweb.nih.gov/ij/>

## Nota

<sup>1</sup> El método de conteo de cajas se basa en la propiedad fractal de autosemejanza. Consiste en cubrir la imagen con cajas de dimensión  $s$  y se seleccionan aquellas celdas que están ocupadas, hasta completar la imagen. Luego, se va cambiando  $s$  progresivamente por otras cajas más pequeñas, siguiendo una proporción (factor de escala) y nuevamente se seleccionan las cajas ocupadas. En cada paso se aplica la fórmula de Hausdorff-Besicovitch y si se desea se traza un gráfico de comportamiento escalar donde representamos: en el eje Y, el logaritmo de las celdas ocupadas en su totalidad (dividendo de la fórmula); en el eje X, el logaritmo de las celdas correspondientes al factor de escala (divisor de la fórmula). El cociente entre valores representa la pendiente de la línea resultante y proporciona el valor de la dimensión fractal.